Евг. В. Юрченко, Ел. В. Юрченко

Уравнения с параметром и нестандартные задачи

7–9 класс

Живая методика математики 2

Евг. В. Юрченко, Ел. В. Юрченко

Уравнения с параметром и нестандартные задачи

7–9 класс

Живая методика математики — 2

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
Ю83

Юрченко Евг. В., Юрченко Ел. В.
Уравнения с параметром и нестандартные задачи. 7–9 класс.
Живая методика математики — 2.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
84 с.
ISBN 978-5-4439-3134-0

В данном пособии представлены основные идеи и технические приёмы преобразований, составляющие базу для решения и исследования задач с параметром. Отличием данного пособия является системный подход к проблеме и значительное количество разобранных примеров. К каждому разделу приведены задания для самостоятельного решения, ответы и указания. Пособие предназначено для учителей математики, студентов педагогических институтов и учащихся, интересующихся математикой. Это пособие будет весьма полезно при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

12+

Подготовлено на основе книги: *Юрченко Евг. В.*, *Юрченко Ел. В.* Уравнения с параметром и нестандартные задачи. 7–9 класс. Живая методика математики — 2. — М.: МЦНМО, 2017. — 88 с. ISBN 978-5-4439-1134-2.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3134-0

Оглавление

Введение

Внимательное изучение государственной программы по математике для средней школы, практическая работа по этой программе в различных направлениях приводят многих учителей к не очень утешительному выводу. Изучение математики в средней школе постепенно, но неуклонно сводится к заучиванию ряда алгоритмов действий в стандартных случаях, для типичных заданий и стандартных примеров.

Нет сомнения в том, что при обучении математике действительно необходимо овладеть алгоритмами, запомнить их и научиться грамотно применять — это одна из составляющих частей обучения. Очень плохо, когда эта составляющая становится главной, и совсем плохо, если она при этом постепенно остаётся единственной. В этом случае теряется основной смысл изучения математики — не развивается умение самостоятельно строить алгоритм решения задачи, которая пусть немного, но отличается от стандарта.

Одной из больших тем, изучение которой позволит отойти от простейших шаблонов, является тема задач с параметрами. Эта часть курса элементарной алгебры, как никакая другая, позволяет эффективно развивать творческое мышление, структурировать поставленную задачу, находить оптимальные решения и т. д. Эта брошюра может служить основой для ведения факультатива по теме «Решение уравнений с параметрами». Те разделы, которые здесь представлены, являются основополагающими при любом системном подходе к изучению методов решения параметрических задач.

По мнению авторов, ведение подобного факультатива можно начинать как с 7 или 8 класса, так и с 9. Более того, если учитель начинает изучение данного направления с 10 или даже 11 класса и хочет, чтобы его факультатив был логичным и системным, то ему не избежать рассматриваемых в пособии разделов. Конечно, распределение часов на соответствующие темы в каждом случае будет различным. Кроме факультативного применения, предлагаемый материал может быть использован и на обычных уроках. Какая его часть и в каком объёме — зависит, прежде всего, от уровня подготовки учащихся, а также, конечно, от наличия времени и энтузиазма преподавателя и т. п.

Хочется также добавить несколько слов о работе над данной темой в реалиях современной школы. Поскольку задания с параметром входят в ЕГЭ, а их решение оценивается достаточно высоко, многие школьники (до 20–25%) проявляют к подобным задачам повышенный интерес. В связи с этим в школах проводят факультативы, кружки, дополнительные занятия по данной теме. Часто эти занятия выглядят так: преподаватель в течение часа-двух подробно разбирает решения нескольких задач ЕГЭ, и так из раза в раз. Думается, что подобные занятия малопродуктивны. Лишь только продуманная система изучения параметрических задач может дать ненулевой результат. А основой, базой любой такой системы должны стать рассматриваемые циклы задач.

Кроме системного подхода, авторы ставили перед собой задачу изложения тех или иных приёмов решения не только тщательным и подробным образом, но и понятным, доступным языком. Насколько поставленные проблемы решены — оценят читатели.

Думаем, что данное пособие окажет значимую пользу и тем учащимся, которые решили «поднимать эту глыбу» самостоятельно, а также родителям, которые имеют желание и достаточную квалификацию, чтобы заниматься уравнениями с параметрами со своими детьми.

Авторы благодарны многим своим ученикам, настаивавшим на необходимости написания данной брошюры. Надеемся, что мы в значительной степени выполнили их пожелания.

Мы также надеемся на конструктивную критику со стороны читателей и ждём ваших пожеланий на будущее, особенно — ответа на вопрос: какие ещё разделы вы хотели бы видеть в подобной брошюре. Мы также будем благодарны за любые замечания и предложения. Наш адрес: `tollen2@yandex.ru`.

1. Линейные уравнения и неравенства с параметром

Линейные уравнения с параметром

Определение. Уравнение вида

$$Ax = B, \qquad (1)$$

где A и B зависят от параметра p, то есть $A=A(p)$, $B=B(p)$ называется *линейным* уравнением с параметром p.

Замечание. Уравнение, которое с помощью тождественных преобразований сводится к уравнению (1), также называется линейным.

В примерах 1.1–1.6 уравнения решаются относительно переменной x при всех значениях параметра.

Пример 1.1 (7–9 класс). Решите уравнение $(p-1)x = 3$.

Решение. При $p = 1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 3$, это уравнение не имеет решений ни для какого x. При $p \neq 1$ имеем $x = \frac{3}{p-1}$;

Ответ: при $p = 1$ решений нет; $x = \frac{3}{p-1}$ при $p \neq 1$.

Пример 1.2 (7–9 класс). Решите уравнение $(p^2-1) \cdot x = p+1$.

Решение. Рассмотрим случай, когда $p^2 - 1 = 0$, то есть

$$\left[\begin{array}{l} p = 1, \\ p = -1. \end{array}\right.$$

а) При $p = 1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 1 + 1$ и оно не имеет решений.

б) При $p = -1$ получим $0 \cdot x = 0$ и любое число $x \in \mathbb{R}$ является его решением.

При $p \notin \{-1; 1\}$ получаем, что

$$x = \frac{p+1}{p^2-1} = \frac{p+1}{(p+1)(p-1)} = \frac{1}{p-1}$$

— единственное решение.

Ответ: при $p=1$ решений нет; при $p=-1$ любое число $x\in\mathbb{R}$; $x=\dfrac{1}{p-1}$ при $p\notin\{-1;1\}$.

Пример 1.3 (7–9 класс). Решите уравнение $\dfrac{x-a}{a-3}=\dfrac{a+1}{a+2}$.

Решение. При $a=3$ или $a=-2$ уравнение не имеет смысла, и, следовательно, не имеет решений. При $a\notin\{-2;3\}$ имеем

$$x-a=\frac{(a+1)(a-3)}{a+2} \quad\Rightarrow\quad x=a+\frac{(a+1)(a-3)}{a+2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2a^2-3}{a+2}.$$

Ответ: при $a\in\{-2;3\}$ решений нет; $x=\dfrac{2a^2-3}{a+2}$ при остальных значениях a.

Пример 1.4 (8–9 класс). Решите уравнение

$$\frac{p-2}{x-p}=\frac{p+1}{p-1}.$$

Решение. При $p=1$ уравнение не имеет смысла, а значит, и решения. При $p\neq 1$ данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(p-1)(p-2)=(x-p)(p+1), & (1)\\ x-p\neq 0. & (2)\end{cases}$$

Уже у очень «въедливого» ученика могут возникнуть вопросы: что такое равносильность? И почему исходное уравнение равносильно написанной системе?

Думаем, что на этом этапе не следует давать исчерпывающего определения равносильности. Можно лишь заметить, что равносильными называют уравнения, имеющие одни и те же решения, а равносильными преобразованиями называют те преобразования, которые приводят к равносильным уравнениям. В частности, к таким преобразованиям относится умножение обеих частей уравнения на одно и то же, отличное от нуля число.

В течение довольно длительного периода следует опираться на почти полностью интуитивное представление о равносильности, и лишь впоследствии, после серьёзной пропедевтики этого важного понятия, можно дать ему точное определение. Но продолжим решение.

При $p=-1$ уравнение (1) примет вид $(-1-1)(-1-2)=(x+1)\cdot 0$; оно не имеет решений.

При $p\neq -1$ имеем

$$x-p=\frac{(p-1)(p-2)}{p+1},$$

откуда

$$x = p + \frac{p^2 - 3p + 2}{p+1} = \frac{2p^2 - 2p + 2}{p+1}. \tag{3}$$

Это выражение могло бы служить ответом, но это не так, ведь ещё существует условие (2). Найдём, при каких значениях p выполнено равенство $x - p = 0$, где x определяется формулой (3). Имеем

$$x - p = 0 \;\Rightarrow\; \frac{(p-1)(p-2)}{p+1} = 0,$$

то есть $p=1$ либо $p=2$, но $p \neq 1$ (см. выше). Следовательно, к тем значениям p, для которых нет решения, добавляется ещё одно значение $p = 2$.

Ответ: при $p \in \{-1; 1; 2\}$ решений нет; $x = \dfrac{2(p^2 - p + 1)}{p+1}$ при остальных значениях p.

Пример 1.5 (8–9 класс). Решите уравнение

$$\frac{p+3}{x-2} = \frac{p^2 - 9}{p+1}.$$

Решение. При $p = -1$ уравнение не имеет смысла, а значит, и решений.

При $p \neq -1$ уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (p+1)(p+3) = (x-2)(p^2 - 9), \\ x - 2 \neq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-2)(p+3)(p-3) = (p+1)(p+3), & (1) \\ x - 2 \neq 0. & (2) \end{cases}$$

При $p = -3$ уравнение (1) примет вид $(x-2) \cdot 0 = 0$ и любое число $x \in \mathbb{R}$ является его решением, но, учитывая неравенство (2), уточним: любое $x \neq 2$ является решением исходного уравнения при $p = -3$.

При $p = 3$ уравнение (1) имеет вид $(x-2) \cdot 6 \cdot 0 = (3+1)(3+3)$. Это уравнение не имеет решений.

При остальных значениях p уравнение (1) преобразуется к виду

$$x - 2 = \frac{(p+1)(p+3)}{(p-3)(p+3)} = \frac{p+1}{p-3}.$$

Проверим условие (2): $x - 2 = 0$ только при $p = -1$, но сейчас мы разбираем случай $p \neq -1$, $p \neq \pm 3$.

Ответ: при $p=-1$ решений нет; при $p=-3$ любое число $x\neq 2$; $x=\dfrac{3p-5}{p-3}$ при других значениях p.

Пример 1.6 (9 класс). Решите уравнение

$$\frac{m+2}{(x-m)(x-1)}=\frac{m^2-4}{(m+1)(x-1)}.$$

Решение. Значение $x=1$ не является решением, так как дроби не определены. При $x\neq 1$ уравнение равносильно следующему:

$$\frac{m+2}{x-m}=\frac{m^2-4}{m+1}.$$

При $m=-1$ уравнение не имеет решений, так как не имеет смысла.

При $m\neq -1$ уравнение можно записать в виде

$$\frac{(m+2)(m+1)}{x-m}=(m-2)(m+2).$$

При $m=-2$ знаменатель имеет вид $x+2$, уравнение примет вид

$$\frac{0\cdot(-2+1)}{x+2}=0\cdot(-4)$$

и любое число x, кроме $x=-2$, является его решением.

При $m\neq -2$ уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} m+1=(x-m)(m-2), & (1)\\ x-m\neq 0. & (2)\end{cases}$$

Если $m=2$, то уравнение (1) примет вид $2+1=(x-m)\cdot 0$; оно не имеет решений.

При $m\neq 2$ из уравнения (1) получим $x-m=\dfrac{m+1}{m-2}$.

Если $m+1=0$, то есть $m=-1$, то $x-m=0$, что противоречит условию (2).

При других значениях m имеем $x-m\neq 0$, и

$$x=m+\frac{m+1}{m-2}=\frac{m^2-m+1}{m-2}.$$

Ответ: при $m\in\{2;-1\}$ решений нет; при $m=-2$ любое число $x\neq 2$; $x=\dfrac{m^2-m+1}{m-2}$ для остальных значений m.

Замечание. Решение любого уравнения (неравенства) следует начинать с рассмотрения «крайних» (иногда говорят «вырожденных») случаев. Это позволит избежать ряда «глупых» ошибок и недочётов.

Линейные неравенства с параметром

Рассмотрим теперь решение линейных неравенств. Среди всех свойств неравенств есть одно, которое является источником наибольшего числа ошибок, особенно если неравенство содержит параметр. Заключается это свойство в том, что *при умножении или делении обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный*, а при умножении (делении) на положительное число знак неравенства не меняется.

Например, если $a > b$, то $-2a < -2b$; $c > d \Leftrightarrow 4c > 4d$.

Определение. *Линейным* называется неравенство вида

$$Ax > B \quad \text{или} \quad Ax < B, \tag{$*$}$$

где A и B — некоторые числа или выражения, зависящие от параметров.

Замечание. Если неравенство с помощью тождественных преобразований приводится к виду $(*)$, оно также называется *линейным*.

В примерах 1.7–1.9 неравенства решаются относительно переменной x при всех значениях параметра.

Пример 1.7 (8–9 класс). Решите неравенство $(p^2-1)x \geqslant p+1$.

Решение. а) При $p^2-1>0$ неравенство примет вид

$$x \geqslant \frac{p+1}{p^2-1}, \quad \text{или} \quad x \geqslant \frac{1}{p-1}.$$

Заметим, что $p^2-1>0$ при $p<-1$ и $p>1$.

б) Если $p^2-1<0$, то есть $-1<p<1$, то неравенство имеет вид

$$x \leqslant \frac{p+1}{p^2-1}, \quad \text{или} \quad x \leqslant \frac{1}{p-1}.$$

в) Если $p=-1$, то неравенство будет выглядеть так:

$$((-1)^2-1)x \geqslant -1+1, \quad \text{или} \quad 0 \cdot x \geqslant 0,$$

что верно для любого $x \in \mathbb{R}$.

Если же $p=1$, то имеем $(1^2-1)x \geqslant 1+1$, то есть $0 \cdot x \geqslant 2$, что неверно для любого $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{p-1}; +\infty\right)$ при $p \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{p-1}\right]$ при $p \in (-1; 1)$; при $p=-1$ любое число $x \in \mathbb{R}$; при $p=1$ решений нет.

Пример 1.8 (8–9 класс). Решите неравенство $\frac{b-1}{b+2}x \leqslant b^2-1$.

Решение. При $b=-2$ неравенство не имеет смысла, а значит, и решения.

а) Пусть $\dfrac{b-1}{b+2}>0$, что выполняется при $b>1$ или $b<-2$. Тогда неравенство равносильно следующему:

$$x\leqslant\frac{b+2}{b-1}\cdot(b^2-1)\iff x\leqslant(b+2)(b+1)\iff x\leqslant b^2+3b+2.$$

б) При $\dfrac{b-1}{b+2}<0$, то есть при $b\in(-2;1)$, решение неравенства имеет вид

$$x\geqslant\frac{b+2}{b-1}\cdot(b^2-1)\iff x\geqslant(b+2)(b+1)\iff x\geqslant b^2+3b+2.$$

в) При $b=1$ неравенство примет вид

$$\frac{0}{3}\cdot x\leqslant 1^2-1,$$

что верно для любого $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: при $b=-2$ решений нет; при $b=1$ любое число $x\in\mathbb{R}$; $x\in(-\infty;b^2+3b+2]$ при $b\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$; $x\in[b^2+3b+2;+\infty)$ при $b\in(-2;1)$.

Пример 1.9 (9 класс). Решите неравенство $\dfrac{a^2-4}{x-a}>(a+2)(a-1)$.

Решение. а) При $a^2-4>0$, то есть

$$a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty),\tag{1}$$

неравенство примет вид

$$\frac{1}{x-a}>\frac{(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-2)}\iff\frac{1}{x-a}>\frac{a-1}{a-2},$$

или

$$\frac{1}{x-a}\cdot\frac{a-2}{a-1}>1\tag{2}$$

(мы разделили неравенство на выражение $\dfrac{a-1}{a-2}$ и учли, что на множестве (1) это выражение всегда положительно).

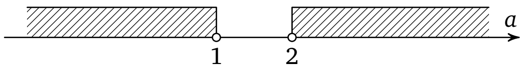
На множестве (1) неравенство (2) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{a-2}{a-1}>x-a,\\ x-a>0\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{a-2}{a-1}<x-a,\\ x-a<0\end{cases}\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{a-2}{a-1}+a>x,\\ x-a>0\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{a-2}{a-1}+a<x,\\ x-a<0\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\dfrac{a^2-2}{a-1}>x,\\ x>a\end{cases} & (3)\\ \begin{cases}\dfrac{a^2-2}{a-1}<x,\\ x<a.\end{cases} & (4)\end{array}\right.$$

Для того чтобы система (3) имела решение, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{a^2-2}{a-1} > a$, то есть $\dfrac{a-2}{a-1} > 0$, так как

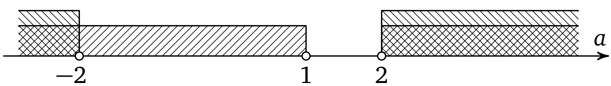
$$\frac{a^2-2}{a-1} - a > 0 \iff \frac{a^2-2-a^2+a}{a-1} > 0 \iff \frac{a-2}{a-1} > 0,$$

или $\left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 2, \end{array}\right.$ то есть $a \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$:



Но мы находимся на области (1). Пересечём полученное решение с множеством (1):

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty), \\ a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty). \end{cases}$$



Решение системы (3) — множество $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Решаем систему (4). Для её решения необходимо, чтобы $\dfrac{a^2-2}{a-1} < a$, или $\dfrac{a-2}{a-1} < 0$, то есть $1 < a < 2$, или $a \in (1; 2)$. Находим пересечение с множеством (1):

$$\begin{cases} a \in (1; 2), \\ a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty). \end{cases}$$

Получим $\varnothing$, то есть система (4) не даёт решений.

Итак, при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ получили $x \in \left(a; \dfrac{a^2-2}{a-1}\right)$.

б) При $a^2 - 4 < 0$, то есть $-2 < a < 2$, исходное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{1}{x-a} < \frac{(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-2)} \iff \frac{1}{x-a} < \frac{a-1}{a-2} \iff \frac{1}{x-a} \cdot \frac{a-2}{a-1} > 1, \qquad (5)$$

так как $\dfrac{a-1}{a-2} < 0$ при $a \in (-2; 2)$.

Тогда неравенство (5) равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{a-2}{a-1} + a > x, \\ x - a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{a-2}{a-1} + a < x, \\ x - a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \dfrac{a^2-2}{a-1} > x, \\ x - a > 0 \end{cases} & (6) \\ \begin{cases} \dfrac{a^2-2}{a-1} < x, \\ x - a < 0. \end{cases} & (7) \end{array}\right.$$

Для существования решения системы (6) необходимо, чтобы

$$\frac{a^2-2}{a-1} > a \iff \frac{a-2}{a-1} > 0 \iff a \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty),$$

но в этом пункте мы рассматриваем только $a \in (-2; 2)$. Пересекая эти области, получим $a \in (-2; 1)$, тогда $x \in \left(a; \frac{a^2-2}{a-1}\right)$.

Аналогично рассматривая систему (7), получим, что $x \in \left(\frac{a^2-2}{a-1}; a\right)$, где $a \in (1; 2)$. Значения $a = -2$; $a = 2$; $a = 1$ проверяем в исходном неравенстве. При $a = 2$ и при $a = -2$ неравенство не имеет решений. При $a = 1$ неравенство примет вид $\frac{-3}{x-1} > 0$, откуда $x < -1$.

Ответ: $x \in \left(a; \frac{a^2-2}{a-1}\right)$ при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$; $x \in$ $\in \left(\frac{a^2-2}{a-1}; a\right)$ при $a \in (1; 2)$; при $a \in \{-2; 2\}$ решений нет; $x \in (-\infty; -1)$ при $a = 1$.

Замечание. При решении данного неравенства мы рассмотрели особые случаи не в начале, а в конце всех рассуждений и преобразований. Это также вполне допустимо. Главное здесь — приучить себя к какой-либо одной системе и неуклонно пользоваться ею, тогда вы избежите довольно частых ошибок, которые, как уже отмечалось, резонно называют «глупыми».

Кроме того, хотелось бы подчеркнуть, что некоторые параметрические задачи (особенно неравенства) при вполне «невинной» формулировке влекут, тем не менее, достаточно разветвлённое и технически сложное решение. В этом состоит специфика темы, к этому нужно быть готовым, и, естественно, надо тренироваться в решении таких задач.

Пример 1.10 (9 класс). При каких значениях параметра p неравенство

$$(p+1)x > -p-4 \tag{1}$$

выполняется для всех $x \in (-2; 1]$?

Решение. 1) Если $p + 1 = 0 \iff p = -1$, то неравенство имеет вид: $0 \cdot x > -3$, что выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$, то есть при $x \in (-2; 1]$ исходное неравенство выполняется. Значит, $p = -1$ принадлежит искомому множеству значений p.

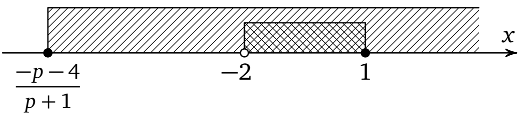
2) Если $p + 1 > 0$, то исходное неравенство равносильно следующему:

$$x > \frac{-p-4}{p+1}. \tag{2}$$

Для того чтобы неравенство (2) выполнялось для всех $x \in (-2; 1]$, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{-p-4}{p+1} \leqslant -2, \\ p+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p-2}{p+1} \leqslant 0, \\ p+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-2 \leqslant 0, \\ p+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<p\leqslant 2.$$

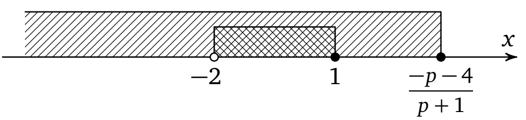
Откуда взялась данная система, кратко можно пояснить так: поскольку решением исходного неравенства при $p+1>0$ являются все x, лежащие правее точки $\dfrac{-p-4}{p+1}$, чтобы полуинтервал $(-2;1]$ принадлежал решению, необходимо и достаточно, чтобы точка $\dfrac{-p-4}{p+1}$ лежала левее точки $x=-2$ или совпадала с ней:



3) Если $p+1<0$, то неравенство (1) можно записать в следующем равносильном виде: $x<\dfrac{-p-4}{p+1}$; чтобы приведённое неравенство было верно для любого $x\in(-2;1]$, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{-p-4}{p+1} > 1, \\ p+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2p+5}{p+1} < 0, \\ p+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+5>0, \\ p+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<p<-1.$$

Иллюстрация второй системы аналогична, по сути, предыдущей и выглядит так:



Объединив все полученные результаты, получим $p\in\left(-\frac{5}{2};2\right]$.

Ответ: $p\in\left(-\frac{5}{2};2\right]$.

Комментарий. Даже внешне не очень сложное неравенство, решение которого не требует каких-либо специфических преобразований, может решаться технически достаточно громоздко (как в приведённом выше примере). Для успешного решения таких, да и многих других параметрических задач необходимы, прежде всего, внимательность, сосредоточенность, структурированность подхода к решению. Если у вас не всё получается, какие-то варианты были пропущены и т. д. — не отчаивайтесь. Практика по решению подобных задач призвана, прежде всего, воспитывать и развивать названные выше качества.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения относительно переменной x при всех значениях параметра:

1) $(a-1)x = a+2$;
2) $(a-2)x = a^2-5a+6$;
3) $(a-1)(a+2)x = a^2+5a+6$;
4) $(a^2-3a+2)x = a-2$;
5) $\dfrac{x-p}{p+1} = p-1$;
6) $\dfrac{x+m}{m+2} = \dfrac{m-1}{m-2}$;
7) $\dfrac{(x-b)(b-1)}{b+3} = \dfrac{b-1}{b+1}$;
8) $\dfrac{(x-p)(p-2)}{p+1} = \dfrac{p^2-5p+6}{p+2}$;
9) $\dfrac{(x-a)(x-2)}{a+2} = \dfrac{(x-2)(a-1)}{a+1}$;
10) $\dfrac{(p+1)(p-2)}{x-p} = \dfrac{p^2-5p+6}{p+2}$;
11) $\dfrac{(x-1)(p+1)}{x+2p} = \dfrac{(x-1)(p^2-2p-3)}{p-2}$;
12) $\dfrac{a^2-a-6}{x-a} = \dfrac{a^2+3a+2}{x-2}$;
13) $\dfrac{b^2+b-12}{x-b} = \dfrac{b^2-b-6}{x+2b}$.

Решите неравенства относительно переменной x при всех значениях параметра:

14) $(a^2-4)x \geqslant a+2$;
15) $(p^3-p^2-4p+4)(x-1) \geqslant p^2-3p+2$.

Ответы

1) При $a=1$ решений нет; $x = \dfrac{a+2}{a-1}$ для остальных значений a.
2) При $a=2$ любое число $x \in \mathbb{R}$; $x = a-3$ при $a \neq 2$.
3) При $a=1$ решений нет; при $a=-2$ любое число $x \in \mathbb{R}$; $x = \dfrac{a+3}{a-1}$ при остальных значениях a.

4) При $a = 2$ любое число $x \in \mathbb{R}$; при $a = 1$ решений нет; $x = \dfrac{1}{a-1}$ при остальных значениях a.

5) При $p = -1$ решений нет; $x = p^2 + p - 1$ для остальных значений p.

6) При $m \in \{-2; 2\}$ решений нет; $x = \dfrac{3m-2}{m-2}$ при остальных значениях m.

7) При $b \in \{-3; -1\}$ решений нет; при $b = 1$ любое число $x \in \mathbb{R}$; $x = \dfrac{b^2 + 2b + 3}{b + 1}$ при остальных значениях b.

8) При $p \in \{-2; -1\}$ решений нет; при $p = 2$ любое число $x \in \mathbb{R}$; $x = \dfrac{2p^2 - 3}{p + 2}$ при остальных значениях p.

9) При $a \in \{-2; -1\}$ решений нет; $x = 2$ при $a \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; при остальных значениях a решений два: $x = 2$, $x = \dfrac{2(a^2 + a - 1)}{a + 1}$.

10) При $p = 2$ любое число $x \neq 2$; при $p \in \{-1; 1; 3\}$ решений нет; $x = \dfrac{2p^2 - 3p - 1}{p - 3}$ при остальных значениях p.

11) При $p = 2$ решений нет; при $p = -1$ любое число $x \neq 2$; $x = 1$ при $p = 3$ и при $p = \dfrac{3 \pm \sqrt{11}}{2}$; $x = \dfrac{12}{7}$ при $p = -\dfrac{1}{2}$; для остальных значений p решений два: $x = \dfrac{-2p^2 + 7p - 2}{p - 3}$, $x = 1$.

12) При $a = -2$ любое число $x \notin \{-2; 2\}$; при $a \in \{-1; 2; 3\}$ решений нет; $x = \dfrac{a^2 - a + 6}{4}$ при $a \notin \{-2; -1; 2; 3\}$.

13) При $b = 3$ любое число $x \notin \{-6; 3\}$; при $b \in \{-4; -2; 0\}$ решений нет; $x = -\dfrac{1}{2}(3b^2 + 10b)$ при $b \notin \{-4; -2; 0; 3\}$.

14) При $a = -2$ любое $x \in \mathbb{R}$; при $a = 2$ решений нет; $x \in \left[\dfrac{1}{a-2}; +\infty\right)$ при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{a-2}\right]$ при $a \in (-2; 2)$.

15) При $p \in \{1; 2\}$ любое $x \in \mathbb{R}$; при $p = -2$ решений нет; $x \in \left[\dfrac{p+3}{p+2}; +\infty\right)$ при $p \in (-2; 1) \cup (2; +\infty)$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{p+3}{p+2}\right]$ при $p \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

2. Решение систем линейных уравнений. Построение простейших графиков функций, содержащих модуль

Взаимное расположение графиков линейных функций на плоскости

Отметим прежде всего, что изучаемая в 7 классе линейная функция

$$y = kx + b \tag{$*$}$$

не может описать любую прямую на плоскости — вертикальная прямая $x = c$ не может быть описана с помощью функции ($*$). Более общее выражение $ax + by = c$ может описать любую прямую на плоскости.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными x и y (коэффициенты $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — постоянные числа).

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (2) \end{cases}$$

Каждое из уравнений (1) и (2) представляет собой уравнение прямой на плоскости; рассматриваются только те случаи, когда хоть один из коэффициентов a_1, b_1 (a_2, b_2) не равен 0.

Какие возможны варианты расположения прямых на плоскости и в каком соотношении находятся при этом коэффициенты в системе (1), (2)?

I. Прямые (1) и (2) параллельны (тогда система (1), (2) не имеет решения). Этот случай описывается так: существует такое число k, что

$$\begin{cases} a_2 = ka_1, \\ b_2 = kb_1, \\ c_2 \neq kc_1. \end{cases}$$

В этом случае говорят, что коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены — нет. (Часто это описывают так: $a_2/a_1 = b_2/b_1 \neq c_2/c_1$, случаи $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ не удовлетворяют сформулированному выше условию).

II. Прямые (1) и (2) совпадают. Тогда система (1), (2) имеет бесконечно много решений (любое её решение — это координаты точки, лежащей на этой прямой). Этот случай реализуется при условии, что существует число k, для которого одновременно выполнены условия:

$$\begin{cases} a_2 = ka_1, \\ b_2 = kb_1, \\ c_2 = kc_1. \end{cases}$$

III. Прямые (1) и (2) пересекаются. Тогда решением является единственная пара чисел — координаты точки пересечения прямых. Это происходит, если для числа k выполняются соотношения

$$\begin{cases} a_2 = ka_1, \\ b_2 \neq kb_1 \end{cases}$$

(или в иной записи $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$). Найдём решение в общем виде, то есть решим систему (1), (2). Умножим уравнение (1) на b_2, а уравнение (2) на $(-b_1)$, полученные уравнения сложим (тогда члены, содержащие неизвестное y, взаимно уничтожаются). Имеем

$$b_2a_1x - b_1a_2x = c_1b_2 - b_1c_2,$$

откуда

$$x_0 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$$

(заметим, что $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$, так как $b_2/b_1 \neq a_2/a_1$).

Теперь первое уравнение умножим на a_2, а второе на $(-a_1)$ и также сложим. Получим

$$b_1a_2y - b_2a_1y = c_1a_2 - c_2a_1,$$

откуда

$$y_0 = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1a_2 - b_2a_1}.$$

В точке $(x_0; y_0)$ прямые пересекаются.

График уравнения прямой с параметром

Замечание. Если в уравнении прямой

$$ax + by = c \qquad (*)$$

один из коэффициентов a или b зависит от параметра p, а остальные — данные постоянные числа, то уравнение $(*)$ будет описывать множество прямых, проходящих через одну неподвижную точку (пучок прямых). Если же от параметра зависит только свободный член c, то уравнение $(*)$ описывает множество прямых, параллельных одной прямой $ax + by = 0$.

Пример 2.1 (7–9 класс). Схематично изобразить на плоскости (x, y) множество прямых, описываемых уравнением

а) $px + 2y = 4$; б) $3x + py = 9$; в) $2x + y = p$.

Решение. а) Заметим, что все прямые вида $px + 2y = 4$ проходят через точку $M(0; 2)$ (рис. 2.1).

б) Прямые $3x + py = 9$ проходят через точку $K(3; 0)$ (рис. 2.2).

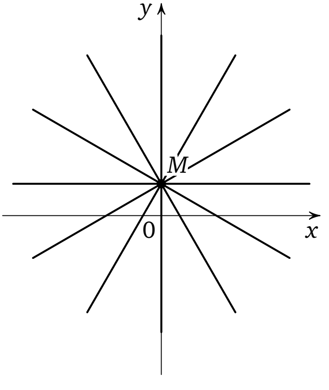


Рис. 2.1

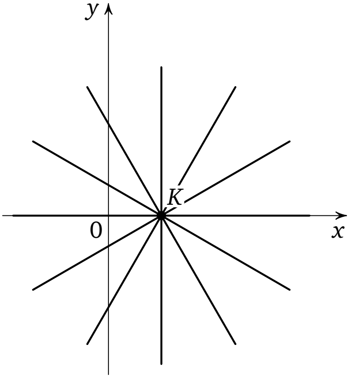


Рис. 2.2

в) Прямые вида $2x+y=p$ параллельны прямой $2x+y=0$ (рис. 2.3).

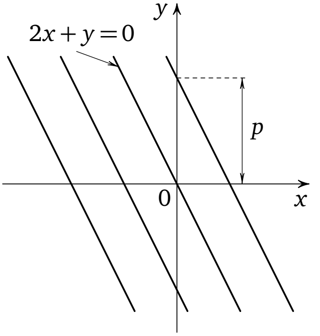


Рис. 2.3

Решение систем линейных уравнений с параметром

В нижеследующих примерах 2.2–2.6 задание: решить систему уравнений относительно x и y.

Пример 2.2 (7–9 класс).

$$\begin{cases} px+3y=6, & (1)\\ 2x-y=4. & (2)\end{cases}$$

Решение. Если $\dfrac{p}{2}=\dfrac{3}{-1}$, то есть $p=-6$, то прямые (1) и (2) параллельны (так как $6/4\neq-3$) и система решений не имеет. Для других значений p решением будет

$$x=\frac{18}{p+6},\quad y=\frac{12-4p}{p+6}.$$

Ответ: при $p=-6$ решений нет; $\left(\dfrac{18}{p+6};\dfrac{12-4p}{p+6}\right)$ при $p\neq-6$.

Пример 2.3 (7–9 класс).

$$\begin{cases} x-3y=1,\\ 2x+(a-1)y=3.\end{cases}$$

Решение. Если $\dfrac{2}{1}=\dfrac{a-1}{-3}$, то есть $a=-5$, то прямые, являющиеся графиками данных уравнений, параллельны (так как $2/1\neq3/1$) и система решений не имеет. При $a\neq-5$ получаем решение

$$x=\frac{a+8}{a+5},\quad y=\frac{1}{a+5}.$$

Ответ: при $a=-5$ решений нет; $\left(\dfrac{a+8}{a+5};\dfrac{1}{a+5}\right)$ при $a\neq-5$.

Пример 2.4 (7–9 класс).

$$\begin{cases} px-2y=4,\\ 3x+ay=-3\end{cases}$$

Решение. В этой системе два параметра — a и p. Если их значения таковы, что выполняются соотношения $\dfrac{p}{3}=\dfrac{-2}{a}=\dfrac{4}{-3}$, то прямые, которые являются графиками уравнений, совпадают и данная система имеет бесконечно много решений — координаты любой точки полученной прямой $2x+y=-2$ являются решением системы. Вышеописанное совпадение происходит при $p=-4$, $a=3/2$.

Если $a=0$, то решением будет $x=-1$, $y=-\frac{1}{2}(p+4)$.

Если $a\notin\{0;3/2\}$ и $p=-6/a$, то решений нет (в этом случае $\frac{p}{3}=$ $=\frac{-2}{a}\neq\frac{4}{-3}$).

Для всех остальных значений a и для $p\neq-6/a$ решением будет

$$x=\frac{4a-6}{ap+6},\quad y=\frac{-12-3p}{ap+6}.$$

Ответ: при $p=-4$ и $a=3/2$ любая пара чисел, удовлетворяющая условию $2x+y=-2$; $\left(-1;-\frac{1}{2}(p+4)\right)$ при $a=0$; при $a\notin\{0;3/2\}$ и $p=-6/a$ решений нет; $\left(\frac{4a-6}{ap+6},\frac{-12-3p}{ap+6}\right)$ при $a\notin\{0;3/2\}$ и $p\neq-6/a$.

Пример 2.5 (8–9 класс).

$$\begin{cases}(a-2)x+3y=6,\\ 4x+(a+2)y=-2.\end{cases}$$

Решение. Заметим, что при $a=-2$ решением будет $x=-1/2$, $y=8/3$. Если $a\neq-2$, то равенство $\frac{a-2}{4}=\frac{3}{a+2}$ выполняется при

$$a^2-4=12 \iff \left[\begin{array}{l}a=4,\\ a=-4.\end{array}\right.$$

При этом для $a=4$

$$\frac{a-2}{4}=\frac{3}{a+2}=\frac{1}{2}\neq\frac{6}{-2},$$

для $a=-4$

$$\frac{a-2}{4}=\frac{3}{a+2}=\frac{-3}{2}\neq\frac{6}{-2},$$

то есть прямые, изображающие первое и второе уравнения системы, будут параллельны, а сама система не будет иметь решений.

При $a\notin\{-4;2;4\}$ система будет иметь единственное решение

$$x=\frac{6(a+3)}{a^2-16},\quad y=\frac{20-2a}{a^2-16}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};\frac{8}{3}\right)$ при $a=-2$; при $a\in\{-4;4\}$ система решений не имеет; $\left(\frac{6(a+3)}{a^2-16};\frac{20-2a}{a^2-16}\right)$ при $a\notin\{-4;-2;4\}$.

Пример 2.6 (8–9 класс).

$$\begin{cases}(a-1)x+2y=4,\\ (a+3)x-y=-1.\end{cases}$$

Решение. При $a+3=0$ система имеет единственное решение

$$x=-\frac{1}{2},\quad y=1. \tag{$*$}$$

Если $a+3\neq 0$, то условие $\dfrac{a-1}{a+3}=\dfrac{2}{-1}$ выполняется только при $a=-5/3$, при этом $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{4}{-1}$, то есть при $a=-5/3$ решений нет (соответствующие прямые параллельны). При остальных значениях a решением будет

$$x=\frac{2}{3a+5},\quad y=\frac{5a+11}{3a+5}.$$

Заметим, что решение ($*$) также описывается полученными формулами.

Ответ: при $a=-5/3$ решений нет; $\left(\dfrac{2}{3a+5},\dfrac{5a+11}{3a+5}\right)$ при любом $a\neq-5/3$.

Пример 2.7 (9 класс). При каких значениях параметра m система

$$\begin{cases}(m-3)x+6y=2,\\ 4x+(m+20)y=8\end{cases}$$

имеет более двух решений?

Решение. Система линейных уравнений может не иметь решений, иметь единственное решение либо иметь бесконечно много решений — когда прямые, описываемые каждым уравнением системы, совпадают. *Отсюда следует, что если система имеет более двух решений, то она имеет бесконечно много решений*. Тогда

$$\frac{m-3}{4}=\frac{6}{m+20}=\frac{2}{8},\quad \text{откуда } m=4.$$

Ответ: при $m=4$.

Построение графиков функций, содержащих знак модуля

Обратимся теперь ко второй теме данного параграфа — *построению графиков линейных функций, содержащих знак модуля*.

Вспомним определение: модулем числа a называется либо само число a, если оно неотрицательно, либо число $(-a)$, если оно отрицательно:

$$|a|=\begin{cases}\ \ a & \text{при } a\geqslant 0,\\ -a & \text{при } a<0.\end{cases}$$

Таким образом, $|-7|=-(-7)=7$, $|5|=5$.

Заметим, что

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad |a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad |-a| = |a|.$$

Пример 2.8 (8–9 класс). Постройте график функции $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$.

Решение. 1. Если $x \geqslant 0$, то $\frac{1}{2}x \geqslant 0$ и $\left|\frac{1}{2}x\right| = \frac{1}{2}x$.

2. Если $x < 0$, то $\frac{1}{2}x < 0$ и $\left|\frac{1}{2}x\right| = -\frac{1}{2}x$.

Таким образом, строим пунктирной линией график $y = \frac{1}{2}x$ и ту его часть, которая соответствует условию $x \geqslant 0$, обводим сплошной линией, затем строим пунктиром $y = -\frac{1}{2}x$ и ту часть, которая соответствует $x < 0$, проводим сплошной линией (рис. 2.4).

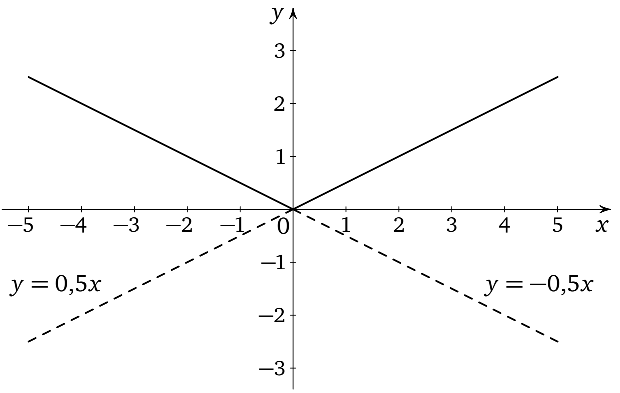


Рис. 2.4

Пример 2.9 (8–9 класс). Постройте график функции $y = |x-2|$.

Решение. Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \geqslant 2, \\ 2-x, & \text{если } x < 2. \end{cases}$$

Построим этот график (рис. 2.5).

Пример 2.10 (8–9 класс). Постройте график функции

$$y = |x+1| + |x-2|.$$

Решение. Разобьём ось Ox на три промежутка точками $x = -1$ и $x = 2$ (в этих точках выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль) и рассмотрим заданную функцию на каждом из этих промежутков (рис. 2.6).

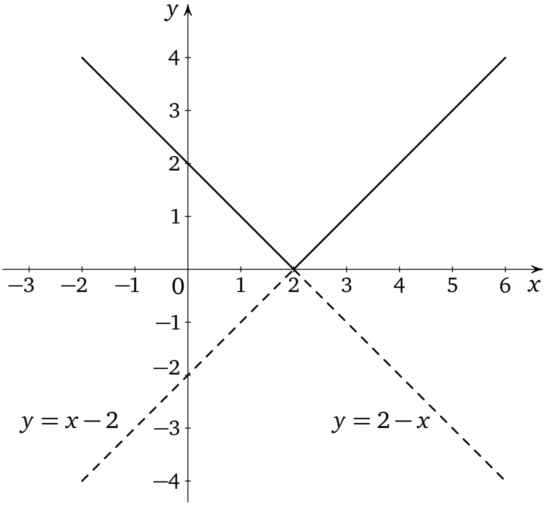


Рис. 2.5

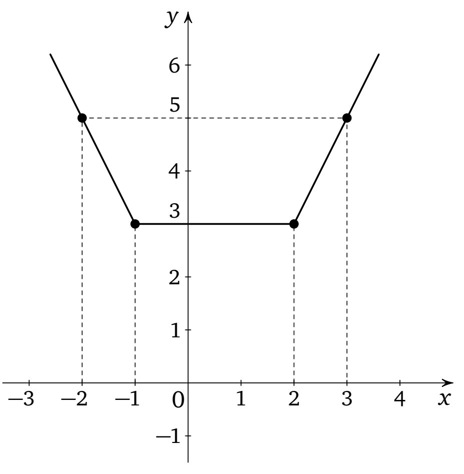


Рис. 2.6

1) Если $x < -1$, то $|x + 1| = -x - 1$ и $|x - 2| = -x + 2$, то есть $y = -2x + 1$.

2) Если $-1 \leqslant x < 2$, то $|x + 1| = x + 1$, $|x - 2| = -x + 2$, тогда $y = 3$.

3) Если $2 \leqslant x$, то $|x + 1| = x + 1$, $|x - 2| = x - 2$, откуда $y = 2x - 1$.

Строить графики линейных функций, содержащих знак модуля, так, как это сделано в примере 2.10, можно при любой степени сложности функции. Однако построить график функции с несколькими модулями достаточно сложно.

Помочь в этом может следующее наблюдение: *при любом количестве знаков модуля, под которым стоят линейные выражения, излом графика функции будет лишь в тех точках, где какое-либо выражение, стоящее под модулем, меняет знак. В промежутке между соседними такими точками функция будет линейной.*

Отсюда и возникает алгоритм быстрого построения графиков рассматриваемых функций.

Пример 2.11 (8–9 класс). Постройте график функции

$$y = |x+3| + |x+1| + |x| + |x-2|.$$

Решение. Знаки выражений, стоящих под знаком модуля, меняются в точках -3; -1; 0; 2. Найдём значения функции в этих точках:

$$y(-3) = 2+3+5 = 10;$$
$$y(-1) = 2+1+3 = 6;$$
$$y(0) = 3+1+2 = 6;$$
$$y(2) = 5+3+2 = 10.$$

Найдём также значения функции ещё в двух точках — одна лежит левее -3 (любая), а другая правее 2 (также любая):

$$y(-4) = 1+3+4+6 = 14,$$
$$y(3) = 6+4+3+1 = 14.$$

Отметим точки $(-4; 14)$, $(-3; 10)$, $(-1; 6)$, $(0; 6)$, $(2; 10)$, $(3; 14)$ на координатной плоскости и соединим соседние точки отрезками, а два крайних луча построим, используя значения $y(-4)$, $y(3)$ (рис. 2.7).

Пример 2.12 (8–9 класс). Постройте график функции

$$y = ||2x-6|-3|.$$

Решение. Заметим, что весь график лежит не ниже оси Ox. Первая точка, нужная нам для быстрого построения графика, — это $(3; 0)$, поскольку $2x-6=0$ при $x=3$. Две другие точки найдём из условий

$$\begin{cases} 2x-6-3=0, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2x+6-3=0, \\ x < 3, \end{cases}$$

откуда $x = 9/2$ или $x = 3/2$. Имеем $y(9/2) = 0$, $y(3/2) = 0$, $y(3) = 3$. Найдём также $y(0) = 3$, $y(5) = 1$. Строим искомый график (рис. 2.8).

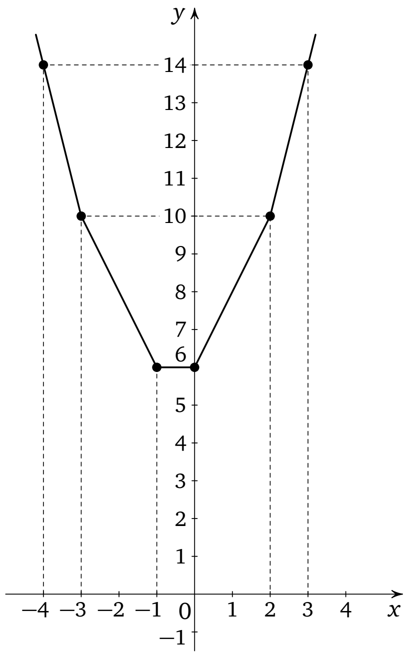


Рис. 2.7

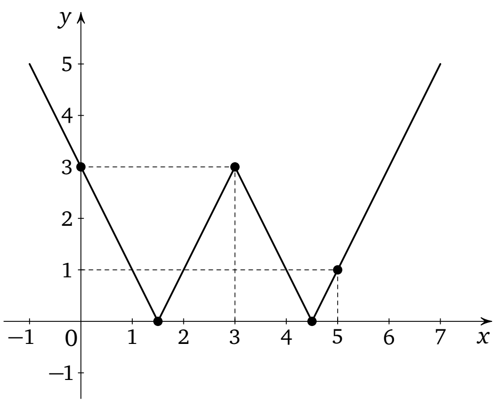


Рис. 2.8

Итак, вот краткий алгоритм быстрого построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля:

1. Находим абсциссы точек, в которых выражения, стоящие под знаками модуля, обращаются в ноль.

2. Вычисляем значения функции в найденных точках, а также значения в двух точках, одна из которых правее самой правой из найденных точек (любая), а вторая — левее самой левой.
3. Соединяем отрезками соседние точки, а крайний правый и крайний левый отрезки продолжаем, соответственно, вправо и влево.

Пример 2.13 (8–9 класс). При каких значениях параметра p уравнение $||2x-6|-3| = px+1$ имеет ровно три решения?

Решение. Построим на одной координатной плоскости графики функций

$$y = ||2x-6|-3| \tag{1}$$

и

$$y = px+1. \tag{2}$$

График функции (1) построен в примере 2.12, а график функции (2) представляет собой одну из прямых, проходящих через точку $(0;1)$.

Из графика функций (1) и (2) легко видеть (рис. 2.9), что условию задачи удовлетворяют только две прямые пучка $y = px+1$, проходящие через точки $A(3;3)$ и $B(9/2;0)$.

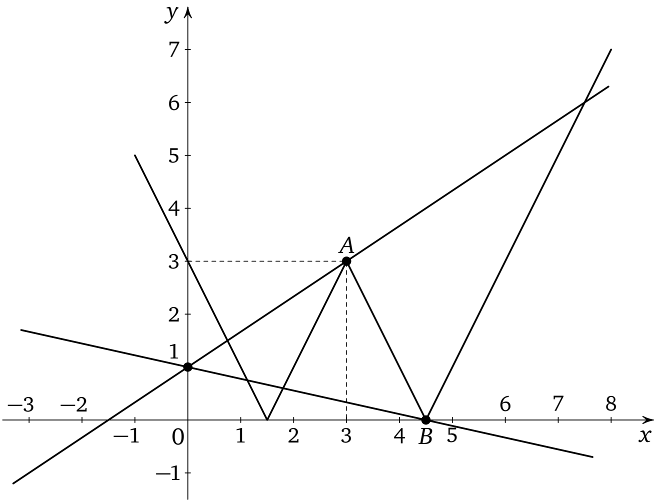


Рис. 2.9

Чтобы точка $A(3;3)$ лежала на прямой $y = px+1$, надо, чтобы выполнялось условие $3 = p\cdot 3+1$, то есть $p = 2/3$. Для точки $B(9/2;0)$ получаем $0 = p\cdot\dfrac{9}{2}+1$, отсюда $p = -2/9$.

Ответ: $p \in \left\{-\frac{2}{9}; \frac{2}{3}\right\}$.

Как видно из приведённого примера, графики функций часто облегчают и значительно ускоряют решение параметрических задач, о чём подробнее будет рассказано в следующих разделах.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–6 решите данную систему относительно переменных x, y для любых значений параметра (параметров):

1) $\begin{cases} ax+2y=1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2ay=2, \\ x+4y=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2px+3y=9, \\ 4x+y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} bx-4y=4, \\ -x+by=-2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} ax+y=6, \\ 3x+by=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} ax-3ay=2a+3, \\ x+ay=1. \end{cases}$

7) При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} (2p+1)x-5y=7+p, \\ p^2+(2p-1)y=5+p^3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

8) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x+ay=a, \\ (a+1)x+2ay=a+3 \end{cases}$$

имеет более двух решений?

9) При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} a^2x-by=a^2-b, \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases}$$

имеет более трёх решений?

10) При каких значениях параметра a все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+ay=3-a, \\ ax+4y=2 \end{cases}$$

удовлетворяют неравенствам $x>1$, $y>-1$?

Ответы

1) При $a=-4$ решений нет; $\left(\dfrac{7}{a+4};\dfrac{2-3a}{a+4}\right)$ при $a\neq -4$.
2) При $a=-6$ решений нет; $\left(\dfrac{5a+4}{a+6};\dfrac{13}{2a+12}\right)$ при $a\neq -6$.
3) При $p=-6$ решений бесконечно много: координаты любой точки, лежащей на прямой $4x+y=3$; $(0;3)$ при $p\neq 6$.
4) При $b=2$ решений бесконечно много: точки прямой $x-2y=2$; при $b=-2$ решений нет; $\left(\dfrac{4}{b+2};-\dfrac{2}{b+2}\right)$ при $b\neq \pm 2$.
5) При $a=6$ и $b=1/2$ решений бесконечно много: точки прямой $6x+y=6$; при $a=3/b$, $b\neq 1/2$ и $b\neq 0$ решений нет; $\left(\dfrac{3-6b}{3-ab};\dfrac{18-3a}{3-ab}\right)$ при остальных значениях a и b.
6) При $a=0$ решений нет; если $a=-3$, то решений бесконечно много: точки прямой $x-3y=1$; $\left(2;-\dfrac{1}{a}\right)$ при $a\notin\{-3;0\}$.
7) При $p\neq 1/3$ и $p\neq -1/3$.
8) При $a=3$.
9) $(a;b)\in\{(1;-1);(1;-2);(-1;-1);(-1;-2)\}$.
10) $a\in(-2;2)\cup(2;4)$.

3. Простейшие рациональные уравнения и неравенства с параметром

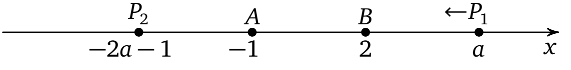
Рассмотрим вначале несколько конкретных примеров, а затем сделаем выводы.

Пример 3.1 (9 класс). При каких значениях параметра a уравнение

$$(x+2a+1)(x+1)(x-2)(x-a)=0$$

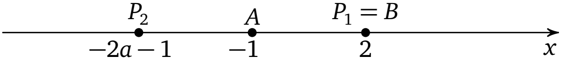
имеет ровно три решения?

Решение. При достаточно больших значениях a (при $a>2$) расположение корней на числовой прямой будет таким:

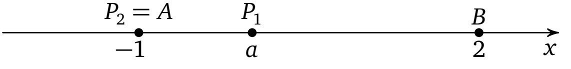


При движении точки $P_1(a)$ влево точка $P_2(-2a-1)$ будет смещаться вправо.

Первый раз три корня возникнут при $a=2$, при этом точка P_1 совпадает с точкой $B(2)$, $-2a-1=-5$, то есть точка $P_2(-5)$ левее точки $A(-1)$:

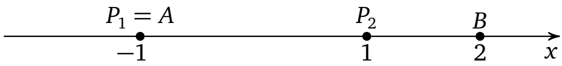


Второй раз три корня возникнут при совпадении точки $P_2(-2a-1)$ и точки $A(-1)$, то есть при $a=0$, тогда точка $P_1(0)$ будет между точками $P_2(-1)$ и $B(2)$:



Третий раз три корня возникнут при совпадении точек P_1 и P_2, то есть при $a=-2a-1$, $a=-1/3$:

Четвёртый случай — совпадение точек $P_1(a)$ и $A(-1)$, то есть $a=-1$, при этом $-2a-1=1<2$ и расположение корней будет таким:



И, наконец, пятый случай — совпадение точек $P_2(-2a-1)$ и $B(2)$, то есть $-2a-1=2$, $a=-3/2$:

Ответ: $a \in \left\{-\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{3}; 0; 2\right\}$.

Пример 3.2 (9 класс). Решите уравнение

$$\frac{(x-3a)(x-2a-1)(x-4)}{x+2a} = 0.$$

Решение. Область определения уравнения задаётся неравенством $x+2a \neq 0$, то есть $x \neq -2a$.

Сначала рассмотрим все случаи, когда число $x=-2a$ обращает в нуль числитель дроби в левой части исходного уравнения, и исключим их.

1) $-2a=4$, то есть $a=-2$, тогда два корня: $3a=-6$ и $2a+1=-3$.

2) $-2a=2a+1$, то есть $a=-1/4$, тогда два корня: 4 и $-3/4$.

3) $-2a=-3a$, то есть $a=0$, тогда два корня: 4 и -1.

Далее рассмотрим случаи совпадения корней:

$$3a = 2a+1 \;\Rightarrow\; a=1, \text{ тогда также два корня } \{3;4\},$$

$$3a=4 \;\Rightarrow\; a=\frac{4}{3} \text{ — также два корня } \left\{4; \frac{11}{3}\right\},$$

$$2a+1=4 \;\Rightarrow\; a=\frac{3}{2} \text{ — два корня } \left\{4; \frac{9}{2}\right\}.$$

Для остальных значений a уравнение имеет три корня $\{3a; 2a+1; 4\}$.

Ответ: $x \in \{-6; -3\}$ при $a=-2$; $x \in \left\{-\frac{3}{4}; 4\right\}$ при $a=-\frac{1}{4}$; $x \in \{4; -1\}$ при $a=0$; $x \in \{3;4\}$ при $a=1$; $x \in \left\{4; \frac{11}{3}\right\}$ при $a=\frac{4}{3}$; $x \in \left\{4; \frac{9}{2}\right\}$ при $a=\frac{3}{2}$; $x \in \{3a; 2a+1; 4\}$ при остальных a.

Пример 3.3 (9 класс). Найдите все натуральные решения уравнения $x^2-y^2=303$.

Решение. Число 303 можно представить в виде произведения двух сомножителей следующим образом:

$$303 = 3 \cdot 101 = (-3)(-101) = 1 \cdot 303 = (-1)(-303).$$

Учитывая, что

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

можем составить следующие системы уравнений:

$$(1)\ \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 101; \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x - y = 101, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} x - y = -3, \\ x + y = -101; \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} x - y = -101, \\ x + y = -3; \end{cases} \quad (5)\ \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 303; \end{cases} \quad (6)\ \begin{cases} x - y = 303, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

$$(7)\ \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -303; \end{cases} \quad (8)\ \begin{cases} x - y = -303, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Поскольку сумма натуральных чисел есть число натуральное, системы (3), (4), (7), (8) натуральных решений не имеют. Далее, решая по очереди оставшиеся системы, получаем:

$$(1)\ \begin{cases} x = 52, \\ y = 49; \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x = 52, \\ y = -49; \end{cases} \quad (5)\ \begin{cases} x = 152, \\ y = 151; \end{cases} \quad (6)\ \begin{cases} x = 152, \\ y = -151. \end{cases}$$

Легко видеть, что натуральными являются только решения систем (1) и (5).

Ответ: $(52; 49)$, $(152; 151)$.

Пример 3.4 (9 класс). Решите неравенство

$$\frac{(x + 3a + 2)(x + 4)}{(x - 1)(x - a)} \geqslant 0.$$

Решение. Область определения неравенства задаётся системой

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq a. \end{cases}$$

Используем метод интервалов.

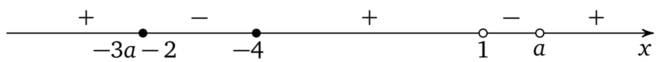
Числитель обращается в нуль при $x = -3a - 2$ и $x = -4$, а знаменатель — при $x = 1$ и $x = a$.

Выявим различные возможности взаимного расположения этих корней.

Два из них постоянны и не зависят от параметра. Это $x = -4$ и $x = 1$. Два других, $x = -3a - 2$ и $x = a$, зависят от a.

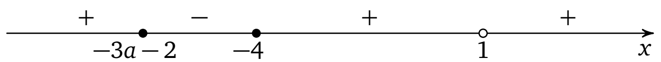
Рассмотрим все возможные значения a. При $a > 1$ получаем, что $-3a - 2 < -4$, так как $a > 1 \Rightarrow -a < -1 \Rightarrow -3a < -3 \Rightarrow -3a - 2 < -5$, и тем более верно $-3a - 2 < -4$. Приведём перебор вариантов в порядке уменьшения параметра a.

1. При $a > 1$ расположение корней следующее:



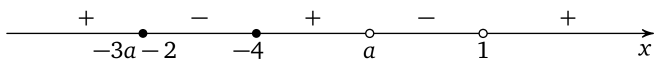
Получаем $x \in (-\infty; -3a - 2] \cup [-4; 1) \cup (a; \infty)$.

2. При $a = 1$ по-прежнему выполняется неравенство $-3a - 2 < -4$, и иллюстрация решения имеет вид:



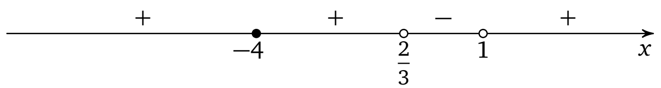
Если $a = 1$, то $x \in (-\infty; -3a - 2] \cup [-4; 1) \cup (1; \infty)$. Этот случай можно включить в пункт 1.

3. Выясняя, при каких $a < 1$ по-прежнему справедливо неравенство $-3a - 2 < -4$, получаем $\dfrac{2}{3} < a < 1$. При этих значениях a расположение корней имеет вид:



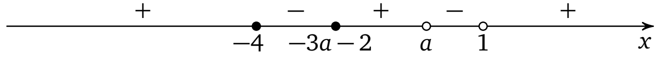
В этом случае $x \in (-\infty; -3a - 2] \cup [-4; a) \cup (1; \infty)$.

4. При $a = \dfrac{2}{3}$ имеем $-3a - 2 = -4$ и расположение корней таково:



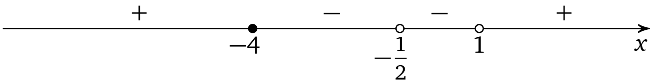
Получаем $x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

5. Точки a и $-3a - 2$ совпадают при $a = -1/2$ — это граница очередного интервала. При $-1/2 < a < 2/3$ расположение корней имеет вид:



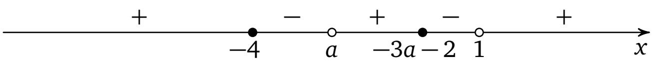
В этом случае $x \in (-\infty; -4] \cup [-3a - 2; a) \cup (1; \infty)$.

6. При $a = -1/2$ происходит «слияние» a и $-3a-2$; корни расположены так:



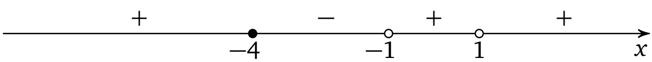
Здесь $x \in (-\infty; -4] \cup (1; \infty)$.

7. Точка $-3a-2$ совпадает с 1 при $a = -1$. При $-1 < a < -1/2$ расположение корней следующее:



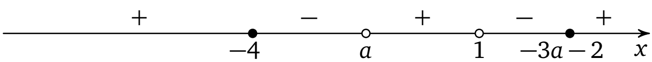
В этом случае $x \in (-\infty; -4] \cup (a; -3a-2] \cup (1; \infty)$.

8. При $a = -1$ получаем $-3a-2 = 1$ и корни расположены так:



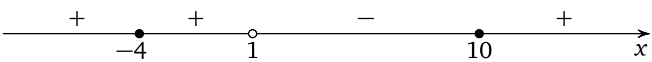
Здесь $x \in (-\infty; -4] \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

9. При $-4 < a < -1$ получаем:



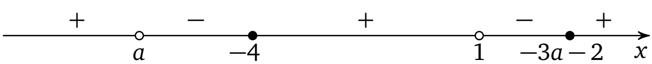
Значит, $x \in (-\infty; -4] \cup (a; 1) \cup [-3a-2; \infty)$.

10. При $a = -4$ имеем $-3a-2 = 10$ и корни расположены так:



В этом случае $x \in (-\infty; 1) \cup [10; \infty)$.

11. При $a < -4$ получаем:



Здесь $x \in (-\infty; a) \cup [-4; 1) \cup [-3a-2; \infty)$.

Ответ:

если $a \geqslant 1$, то $x \in (-\infty; -3a-2] \cup [-4; 1) \cup (a; +\infty)$;
если $2/3 < a < 1$, то $x \in (-\infty; -3a-2] \cup [-4; a) \cup (1; +\infty)$;
если $a = 2/3$, то $x \in (-\infty; 2/3) \cup (1; +\infty)$;
если $-1/2 < a < 2/3$, то $x \in (-\infty; -4] \cup [-3a-2; a) \cup (1; +\infty)$;
если $a = -1/2$, то $x \in (-\infty; -4] \cup (1; +\infty)$;
если $-1 < a < -1/2$, то $x \in (-\infty; -4] \cup (a; -3a-2] \cup (1; +\infty)$;
если $a = -1$, то $x \in (-\infty; -4] \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$;
если $-4 < a < -1$, то $x \in (-\infty; -4] \cup (a; 1) \cup [-3a-2; +\infty)$;

если $a=-4$, то $x\in(-\infty;1)\cup[10;+\infty)$;
если $a<-4$, то $x\in(-\infty;a)\cup[-4;1)\cup[-3a-2;+\infty)$.

Пример 3.5 (9 класс). На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. Затем все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их число увеличилось на 3. Завод стал выпускать 11 200 деталей в день. Сколько прессов было первоначально?

Решение. Пусть x — начальное число прессов, n — количество деталей, штампуемых одним прессом.

Тогда $x+3$ — количество новых прессов, m — количество деталей, штампуемых одним новым прессом.

Учитывая, что $6480=3^4\cdot2^4\cdot5$, а $11\,200=2^6\cdot5^2\cdot7$, получим

$$\begin{cases} xn=3^4\cdot2^4\cdot5\cdot1, & (1)\\ (x+3)m=2^6\cdot5^2\cdot7, & (2)\\ m>n,\quad x\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}. & (3)\end{cases}$$

Заметим, что если x кратно 3, то $x+3$ также кратно 3, но число в правой части уравнения (2) не кратно 3, то есть x не кратно 3.

Предположим, что x — чётное число. Тогда $x+3$ — нечётное и, согласно уравнению (2), может принимать значения 5, 5^2, 7, $7\cdot5$, $7\cdot5^2$.

1. Если $x+3=5$, то $x=2$, $m=2^6\cdot5\cdot7$, $n=3^4\cdot2^3\cdot5$, но $n>m$ — этот случай не подходит.

2. Если $x+3=5^2$, то $x=22$ — не выполняется условие (1).

3. Если $x+3=7$, то $x=4$, $m=2^6\cdot5^2$, $n=3^4\cdot2^2\cdot5$, тогда $n>m$ — не подходит.

4. Если $x+3=7\cdot5$, то $x=32$ — не выполняется условие (1).

5. Если $x+3=7\cdot5^2$, то $x=172$ — также не выполняется условие (1).

Следовательно, число x нечётное, откуда для числа x две возможности:

а) $x=1$, тогда $n=3^4\cdot2^4\cdot5$, $x+3=4$, $m=2^4\cdot5^2\cdot7$, но $n>m$, что противоречит условию (3);

б) $x=5$, тогда $n=3^4\cdot2^4$, $x+3=8$, $m=2^3\cdot5^2\cdot7$, $m>n$.

Ответ: первоначально было 5 прессов.

Краткое заключение

У некоторых учеников складывается впечатление, что нестандартные задачи решаются с помощью «золотого ключика» — знания особых приёмов, формул и т. п., которые позволяют быстро и эффективно решить задачу. Это глубоко ошибочное представление. Часто для решения нестандартных задач, к которым традиционно относят и параметрические, требуется умение рассмотреть довольно много вариантов, внутри каждого из них провести определённые рассуждения, выкладки и т. д., и лишь затем делать общий вывод, получать итоговый ответ. Это, как правило, достаточно трудоёмкий процесс, необходимо приучить себя к нему и не пытаться «победить» с помощью короткой «кавалерийской» атаки там, где необходима долгая и тщательная «осада». Главное здесь — выбрать не только правильный, но и наиболее рациональный путь перебора вариантов. Это поможет сократить длинный путь к цели.

Авторы желают читателям терпения, усидчивости и «интеллектуальной аккуратности».

Задачи для самостоятельного решения

1) При каких значениях параметра a уравнение

$$(x+5)(x+3)(x-a)(x-3)=0$$

имеет ровно три решения?

2) При каких значениях параметра p уравнение

$$(x+4p+3)(x+4)(x-1)(x-p)=0$$

имеет три различных корня?

3) При каких значениях параметра p уравнение

$$(x+5)(x+3p+4)(x+2)(x-1)(x-p)=0$$

имеет ровно четыре корня?

4) При каких значениях параметра m уравнение

$$(x+3m+4)(x+3)(x+m+1)(x-1)(x-m)=0$$

имеет ровно четыре корня?

5) Решите уравнение

$$\frac{(x+m+2)(x+3)(x-2)}{x-m}=0$$

для любого значения параметра m.

6) Решите уравнение
$$\frac{x+2}{p+1}=\frac{2x-p-1}{x-2}$$
для любого значения параметра p.

7) Решите неравенство
$$\frac{x}{x+p}<1$$
для любого значения параметра p.

8) Решите неравенство
$$\frac{(x-1)(x-a)}{x-\dfrac{a+1}{2}}>0$$
при всех значениях параметра a.

9) Решите неравенство
$$\frac{x-a}{x+2a}>0$$
при всех значениях параметра a.

10) Решите неравенство
$$\frac{x-(2a-3)}{x+a-1}\geqslant 0$$
при всех значениях параметра a.

11) Решите неравенство
$$\frac{ax-(1-a)a}{a^2-ax-1}>0$$
при всех значениях параметра a.

12) Найдите все натуральные решения уравнения $x^2-y^2=31$.

13) Найдите число диагоналей выпуклого n-угольника.

14) Найдите максимальное число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника.

Ответы

1) $a\in\{-5;-3;3\}$.

2) $p\in\left\{-4;-1;-\frac{3}{5};\frac{1}{4};1\right\}$;

3) $p\in\left\{-5;-2;-\frac{5}{3};-1;\frac{1}{3};1\right\}$.

4) $m \in \left\{-3; -2; -\frac{5}{3}; -1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 1; 2\right\}$.

5) Если $m \in \{-4; -1; 1\}$, то $x \in \{-3; 2\}$; если $m = -3$, то $x \in \{1; 2\}$; если $m = 2$, то $x \in \{-4; -3\}$; $x \in \{-m-2; -3; 2\}$ для остальных значений m.

6) Если $p = -1$, то $x \in \varnothing$; если $p = 3$, то $x = 6$; если $p \notin \{-1; 3\}$, то $x \in \{p+3; p-1\}$.

7) Если $p < 0$, то $x \in (-\infty; -p)$; если $p = 0$, то $x \in \varnothing$; если $p > 0$, то $x \in (-p; +\infty)$.

8) Если $a < 1$, то $x \in \left(a; \frac{a+1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$, если $a = 1$, то $x \in (1; +\infty)$; если $a > 1$, то $x \in \left(1; \frac{a+1}{2}\right) \cup (a; +\infty)$.

9) Если $a<0$, то $x\in(-\infty; a)\cup(-2a; +\infty)$; если $a\geqslant 0$, то $x\in(-\infty; -2a)\cup \cup (a; +\infty)$.

10) Если $a < 4/3$, то $x \in (-\infty; 2a-3] \cup (1-a; +\infty)$;
если $a = 4/3$, то $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$;
если $a > 4/3$, то $x \in (-\infty; 1-a) \cup [2a-3; +\infty)$.

11) Если $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (1; +\infty)$, то $x \in \left(1-a; \frac{a^2-1}{a}\right)$;
если $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 1)$, то $x \in \left(\frac{a^2-1}{a}; 1-a\right)$;
если $a \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$, то $x \in \varnothing$.

12) $x = 16$, $y = 15$.

13) $\frac{n(n-3)}{2}$.

14) $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$.

4. Расположение корней квадратного трёхчлена. Теорема Виета

При решении задач, связанных с расположением корней квадратного трёхчлена, содержащего параметр, очень редко пользуются формулой корней квадратного трёхчлена

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

В основном это происходит в тех случаях, когда дискриминант D является полным квадратом какого-либо выражения.

В случае, если это не так, используют другие методы решения, основанные на хорошо известных свойствах параболы. При этом необходимые и достаточные условия для выполнения поставленных в задаче вопросов формулируются с помощью *условий на границах промежутка*, условий для *абсциссы вершины параболы* и *знака дискриминанта*. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.1 (8–9 класс). При каких значениях параметра a корни многочлена $x^2 + (a+1)x + a - 3 = 0$ лежат по разные стороны от числа 1?

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 + (a+1)x + a - 3$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 4.1). Необходимым и достаточным условием расположения корней по разные стороны от числа $x_0 = 1$ будет единственное условие: $y(1) < 0$, что следует из свойств параболы.

Таким образом,

$$y(1) < 0 \iff 1 + a + 1 + a - 3 < 0 \iff 2a - 1 < 0 \iff a < \frac{1}{2}.$$

Ответ: при $a \in (-\infty; 1/2)$ корни данного квадратного трёхчлена лежат по разные стороны от числа 1.

Замечание. В дальнейшем будем считать, что, например, уравнение $(x-2)^2 = 0$ имеет *два равных* корня (но *единственное* решение).

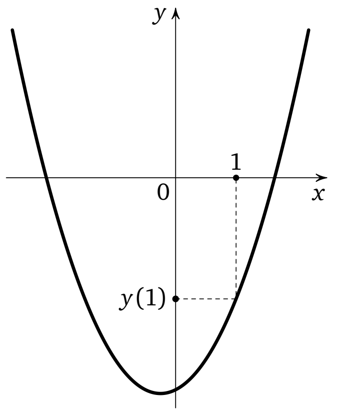


Рис. 4.1

Пример 4.2 (9 класс). При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + ax + a^2 - 7 = 0$ лежат на интервале $(1; 3)$?

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 + ax + a^2 - 7$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 4.2).

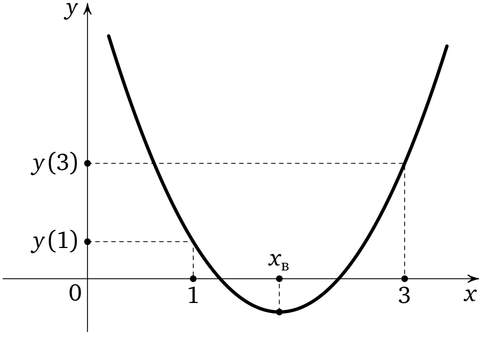


Рис. 4.2

Система необходимых и достаточных условий для решения этой задачи выглядит так:

$$\begin{cases} y(1) > 0, & (1) \\ y(3) > 0, & (2) \\ 1 < x_в < 3, & (3) \\ D \geqslant 0. & (4) \end{cases}$$

Условия (1) и (2), очевидно, необходимы. Условие (3) исключает параболы вида I или II (рис. 4.3), для которых условия (1) и (2) выполнены, но корни лежат вне интервала $(1; 3)$.

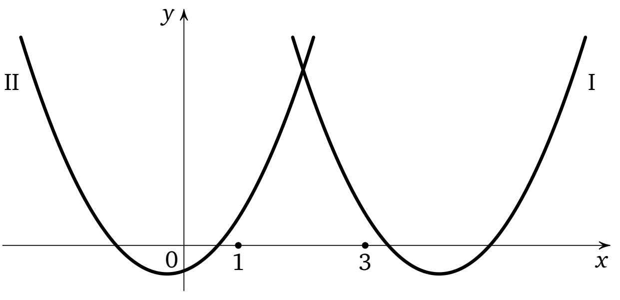


Рис. 4.3

Условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы корни уравнения вообще существовали. При этом условие $D=0$ даёт *два корня, равных друг другу*.

$$\begin{cases} 1+a+a^2-7>0,\\ 9+3a+a^2-7>0,\\ 1<-\frac{a}{2}<3,\\ a^2-4(a^2-7)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+3)>0,\\ (a+1)(a+2)>0,\\ -2>a>-6,\\ a^2-\frac{28}{3}\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}}\leqslant a<-3.$$

Ответ: $a\in\left[-\sqrt{\frac{28}{3}};-3\right)$.

Пример 4.3 (9 класс). При каких значениях параметра a уравнение $x^2+(2a-1)x+a^2+9=0$ имеет два различных корня, больших 1?

Решение. Рассмотрим функцию $y=x^2+(2a-1)x+a^2+9$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Изобразим график функции, удовлетворяющей нашим условиям (рис. 4.4 *а*). Очевидно, что требование $y(1)>0$ является необходимым. Но это требование **недостаточно**, например, оно выполняется для парабол, приведённых на рис. 4.4 *б*.

У парабол вида I корни есть, но они меньше 1. Условие $x_{\text{в}}>1$ исключает такие параболы. У парабол вида II корней вообще нет, и условие $D>0$ исключает их и, кроме этого, исключает случай совпадающих корней, поскольку по условию корни должны быть различны.

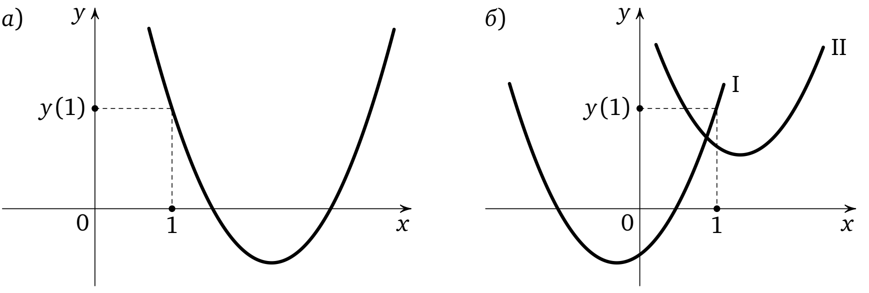


Рис. 4.4

Таким образом, система необходимых и достаточных условий имеет вид:

$$\begin{cases} y(1) > 0, \\ x_{\text{в}} > 1, \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + a^2 + 9 > 0, \\ \dfrac{1-2a}{2} > 1, \\ (2a-1)^2 - 4(a^2+9) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a+1)^2 + 8 > 0, \\ 1 > 2 + 2a, \\ -4a + 1 - 36 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\dfrac{1}{2}, \\ a < -\dfrac{35}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{35}{4}\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{35}{4}\right)$.

Пример 4.4 (9 класс). При каких значениях параметра p отрезок $[1; 2]$ содержится в решении неравенства $px^2 + (2p-1)x - 2 < 0$?

Решение. 1) При $p = 0$ имеем $-x-2<0 \Leftrightarrow x>-2$ и отрезок $[1; 2]$ содержится в решении, поскольку $[1; 2] \subset (-2; \infty)$.

2) Пусть $p > 0$, тогда графиком функции

$$y = px^2 + (2p-1)x - 2 \qquad (*)$$

будет парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 4.5). Необходимые и достаточные условия для решения задачи будут выглядеть так:

$$\begin{cases} y(1) \leqslant 0, \\ y(2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + 2p - 1 - 2 \leqslant 0, \\ 4p + (2p-1)\cdot 2 - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leqslant 1, \\ p \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $p > 0$, получаем $p \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

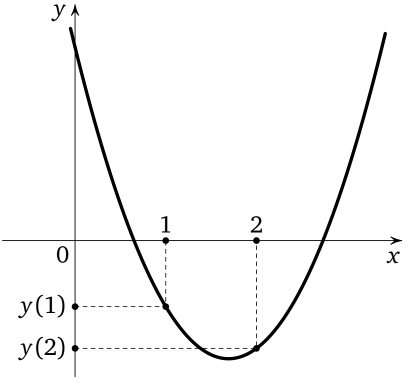


Рис. 4.5

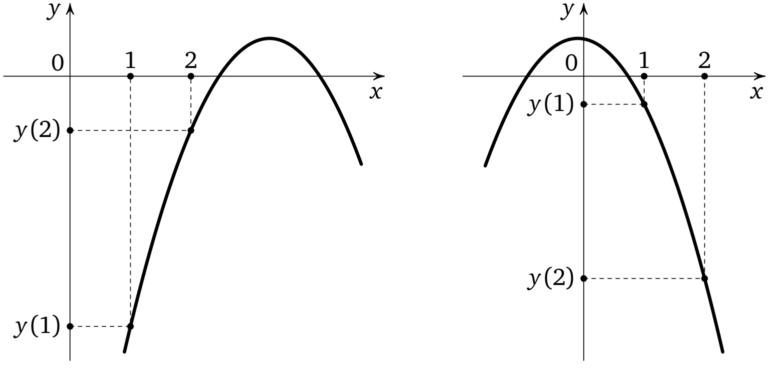


Рис. 4.6

3) Пусть $p<0$, тогда ветви параболы $(*)$ направлены вниз (рис. 4.6) и соответствующие условия выглядят так же:

$$\begin{cases} y(1) \leqslant 0, \\ y(2) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_в \geqslant 2, \\ x_в \leqslant 1, \\ D < 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Учитывая, что рассматривается случай $p < 0$, решением этой системы будет луч $(-\infty; 0)$. Объединяя это решение с рассмотренными выше случаями, получим окончательный ответ.

Ответ: $p \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Пример 4.5 (9 класс). Найдите все значения параметра t, при которых все решения неравенства $tx^2 + (1-t^2)x - t > 0$ принадлежат отрезку $[-2; 2]$.

Решение. Заметим, что при $t > 0$ решением данного неравенства будут либо два луча, либо вся числовая прямая (если $D < 0$), и они не могут войти в промежуток $[-2; 2]$.

При $t = 0$ решение $x > 0$ — также луч, и он не может принадлежать отрезку $[-2; 2]$.

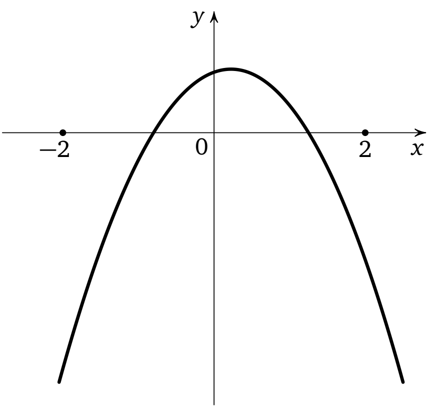


Рис. 4.7

При $t < 0$, обозначив $y(x) = tx^2 + (1-t^2)x - t$, получаем (рис. 4.7)

$$\begin{cases} t < 0, \\ y(-2) \leqslant 0, \\ y(2) \leqslant 0, \\ -2 < x_{\text{в}} < 2, \\ D \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0, \\ 2t^2 + 3t - 2 \leqslant 0, \\ -2t^2 + 3t + 2 \leqslant 0, \\ -2 < \dfrac{t^2-1}{2t} < 2, \\ (1+t^2)^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $t \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Пример 4.6 (9 класс). При каких значениях параметра p хотя бы один корень уравнения $x^2 - px + p + 1 = 0$ больше -1?

Решение. Обратим внимание на вопрос задачи — «хотя бы один корень». Так поставленный вопрос подразумевает, что условию удовлетворяют и те значения p, при которых оба корня уравнения больше -1,

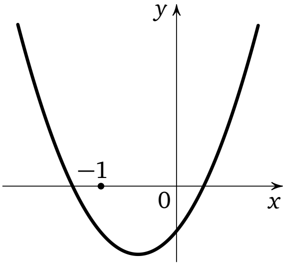


Рис. 4.8

и те, при которых только один корень уравнения больше -1, поэтому решением исходной задачи будет совокупность систем (рис. 4.8)

$$\left[\begin{array}{l} y(-1)<0, \\ \begin{cases} y(-1)>0, \\ x_{\text{в}}>-1, \\ D\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y(-1)=0, \\ x_{\text{в}}>-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2p+2<0, \\ \begin{cases} 2p+2>0, \\ \frac{p}{2}>-1, \\ p^2-4(p+1)\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2p+2=0, \\ \frac{p}{2}>-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p<-1, \\ \begin{cases} p>-1, \\ p>-2, \\ \left[\begin{array}{l} p\leqslant 2-2\sqrt{2}, \\ p\geqslant 2+2\sqrt{2}, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} p=-1, \\ p>-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p\leqslant 2-2\sqrt{2}, \\ p\geqslant 2+2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $p\in(-\infty; 2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2}; +\infty)$.

Пример 4.7 (9 класс). При каких значениях параметра b корни уравнения $bx^2-2(b-1)x+2b-6=0$ имеют разные знаки и по модулю не превосходят 2?

Решение. Рассмотрим функцию $y=bx^2-2(b-1)x+2b-6$.

Заметим, что при $b=0$ не может быть корней разных знаков у исходного уравнения, так как $2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$.

При $b>0$ необходимые и достаточные условия формулируются так (рис. 4.9):

$$\begin{cases} b>0, \\ y(0)<0, \\ y(2)\geqslant 0, \\ y(-2)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0, \\ b<3, \\ b\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leqslant b<3.$$

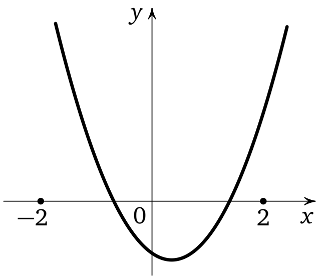


Рис. 4.9

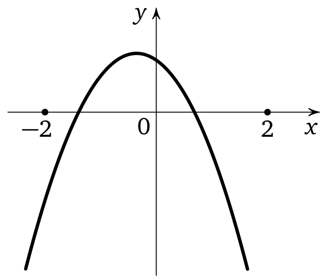


Рис. 4.10

При $b<0$ соответствующие условия записываются так (рис. 4.10):

$$\begin{cases} b<0, \\ y(0)>0, \\ y(-2)\leqslant 0, \\ y(2)\leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b<0, \\ b>3, \\ b\leqslant 1 \end{cases} \iff b\in\varnothing.$$

Ответ: $b\in[1;3)$.

Замечание. Придирчивый читатель может сказать, что всё это, конечно, хорошо, но где строгие доказательства? Эти доказательства приведены в брошюре [11].

Выводы

Повторим, что при решении задач, связанных с расположением корней квадратного трёхчлена, чаще всего следует пользоваться тремя «действующими лицами» — значениями функции в концах (конце) данного промежутка, абсциссой вершины и знаком дискриминанта.

Так в спектаклях средневековых вагантов, менестрелей и миннезингеров участвовали лишь три лица — Добро, Зло и Девушка.

В заключение этого раздела хотелось бы сформулировать рекомендации для решения задач, связанных с квадратными уравнениями с параметром.

Для решения большинства подобных задач наиболее эффективный путь — использование системы необходимых и достаточных условий, накладываемых на значения квадратичной функции в граничных точках, на абсциссу вершины и знак дискриминанта.

Рекомендуем всеми силами стараться не использовать формулу корней квадратного уравнения, а пользоваться ею, лишь если в постановку задачи входит: «решить данное уравнение (с параметром)».

Вычисление дискриминанта D можно выполнять в начале решения только с одной целью: проверить, не является ли дискриминант D полным квадратом какого-либо более простого выражения. В этом случае выражения для корней будут достаточно простыми, и тогда можно будет решить задачу, используя аккуратный перебор вариантов (см. раздел 2).

Формулировать необходимые и достаточные условия для решения задачи в значительной степени помогает график квадратичной функции — парабола.

Свойства параболы хорошо известны и очень наглядны, в силу чего не требуется лишних аналитических, формальных доказательств.

Задачи для самостоятельного решения

1) При каких значениях параметра a корни уравнения
$$x^2-2(a-1)x+2a+1=0$$
имеют разные знаки и по модулю не превосходят 4?

2) При каких значениях параметра m корни уравнения
$$mx^2-(3m-2)x+m-3=0$$
лежат по разные стороны от числа $x_0=-1$?

3) При каких значениях параметра p все решения неравенства
$$px^2+(1-p^2)x-p>0$$
принадлежат отрезку $[-2; 2]$?

4) При каких значениях параметра b оба корня уравнения
$$(b+1)x^2-3bx+4b=0$$
больше 1?

5) При каких значениях параметра m оба корня уравнения
$$mx^2-(m+1)x+2=0$$
по модулю меньше 1?

6) При каких значениях параметра t оба корня уравнения
$$(t+2)x^2-2tx+3t=0$$
положительны?

7) При каких значениях параметра p для любого $x \in (1; 2)$ выполняется неравенство
$$x^2 + px + p^2 + 6p < 0?$$

8) Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения
$$x^2 + x + a = 0$$
больше a.

9) При каких значениях параметра k уравнение
$$(k+1)x^2 - (2k+5)x + k - 2 = 0$$
имеет один корень на луче $[-2; \infty)$?

10) При каких значениях параметра b уравнение
$$(b+2)x^2 + 2bx + b - 1 = 0$$
не имеет корней, меньших -1?

11) При каких значениях параметра a уравнение
$$(a-3)x^2 - 6ax + 9a - 1 = 0$$
имеет не более одного корня, удовлетворяющего неравенству $x < 1$?

12) Найдите все значения параметра p, при которых один из корней уравнения
$$(p^2 + p + 1)x^2 + (p-1)x + p^2 = 0$$
больше 3, а другой меньше 3.

13) При каких значениях параметра a неравенство
$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 1 > 0$$
выполнено для любого значения x?

14) Найдите все значения параметра p, при которых оба корня уравнения
$$x^2 - 6px + (2 - 2p + 9p^2) = 0$$
больше 3.

15) При каких значениях параметра m корни уравнения
$$(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$$
различны и принадлежат интервалу $(2; 5)$?

16) Найдите все значения параметра d, при которых неравенство

$$\frac{dx-d(1-d)}{d^2-dx-1}>0$$

будет выполнено для любых x, не превосходящих по модулю 1.

Ответы

1) $a\in\left[-0{,}9;-\frac{1}{2}\right)$.
2) $m\in(0;1)$.
3) $p\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.
4) $b\in\left[-\frac{16}{7};-1\right]$.
5) $m\in[3+2\sqrt{2};+\infty)$.
6) $t\in[-3;-2)$.
7) $p\in\left[\frac{-7-3\sqrt{5}}{2};-4+2\sqrt{3}\right]$.
8) $a\in(-\infty;-2)$.
9) $k\in\left[-\frac{4}{3};-1\right]$.
10) $b\in[-2;+\infty)$.
11) $a\in\left(-\infty;\frac{3}{28}\right]\cup[1;+\infty)$.
12) $p\in\varnothing$ (нет решений).
13) $a\in[1;+\infty)$.
14) $p\in\left(\frac{11}{9};+\infty\right)$.
15) $m\in\left(-\frac{16}{7};-2\right)$.
16) $d\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

5. Нахождение экстремумов некоторых функций без использования производной

Используемый метод и его наглядное обоснование. Построение эскиза графика функции

В начале этого параграфа нам придётся освоить несколько существенных определений, но, надеюсь, сделать это будет достаточно просто, поскольку вводимые объекты очень наглядны — они будут подробно иллюстрированы.

Определение 1. *Окрестностью* точки x_0 называется интервал $(x_0 - d; x_0 + d)$, где $d > 0$. Обозначение $O(x_0; d)$.

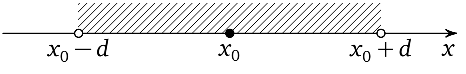


Рис. 5.1

Определение 2. Точка $x_{\max}$ называется *точкой строгого максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность $O(x_{\max}; d)$, что для любого $x \in O(x_{\max}; d)$ справедливо неравенство $f(x_{\max}) > f(x)$ (рис. 5.2 *а–г*).

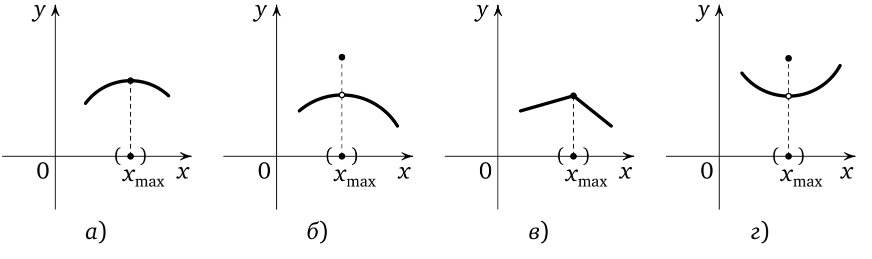


Рис. 5.2

Определение 3. Точка $x_{\min}$ называется *точкой строгого минимума*, если существует такая окрестность точки $x_{\min}$, что для любого $x \in O(x_{\min}; d)$ выполняется $f(x_{\min}) < f(x)$ (рис. 5.3 *а–г*)

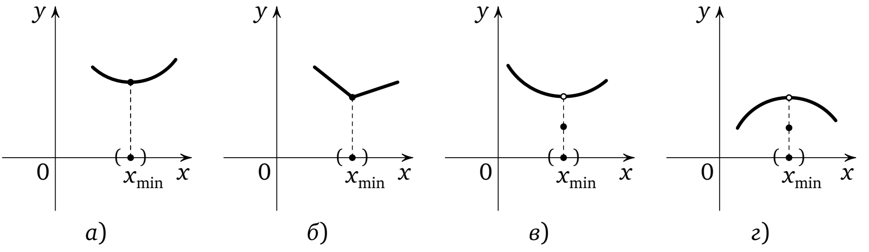


Рис. 5.3

Определение 4. Точки минимума ($x_{\min}$) и максимума ($x_{\max}$) называются *точками экстремума* функции $f(x)$, а значения функции в этих точках, соответственно $f(x_{\min})$ и $f(x_{\max})$, называются *экстремумами* функции.

Обозначения: $f(x_{\min}) = y_{\min}$ — минимум, $f(x_{\max}) = y_{\max}$ — максимум функции $f(x)$.

Заметим, что точек экстремума функции, а следовательно, и экстремумов может быть несколько, например, на рис. 5.4 имеются три точки минимума и две точки максимума.

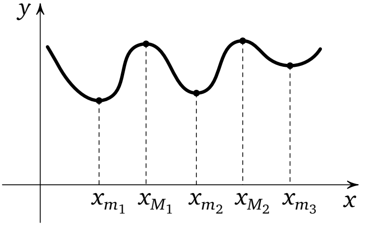


Рис. 5.4

Теперь об идее нахождения точек экстремума и самих экстремумов с помощью параметрических уравнений и без использования производной.

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей в точке $x_{\min}$ минимум, и график прямой $y = a$ (рис. 5.5).

Если уравнение $f(x) = a$ имеет два корня x_1 и x_2, которые сближаются, стремясь к x_0, при движении прямой $y = a$ вниз (то есть умень-

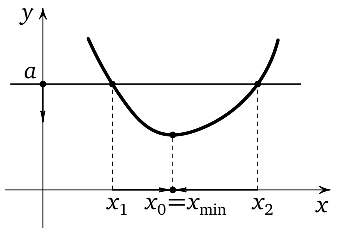


Рис. 5.5

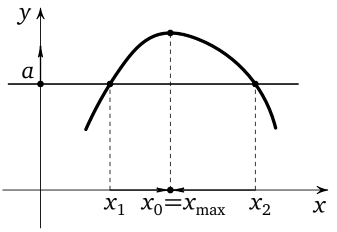


Рис. 5.6

шении a), и в некоторой точке x_0 эти корни становятся равными, то есть $x_1 = x_2 = x_0$, то точка x_0 является точкой минимума. Если то же самое происходит при движении прямой $y = a$ вверх, то точка x_0 будет являться точкой максимума (рис. 5.6).

Следует особо подчеркнуть, что этот способ подходит лишь для непрерывных функций. Но что такое непрерывная функция? Точного формального ответа на этот вопрос в рамках данного пособия дать нельзя (не хватает многих предварительных знаний). Воспользуемся не очень хорошим, но всё же близким к действительности «рабочим определением». Функция является непрерывной на интервале (луче, всей числовой прямой), если её график можно нарисовать на данном промежутке, не отрывая карандаша от бумаги.

Часто задачи на нахождение экстремума сводятся к параметрической задаче следующего вида: при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение? Но, найдя такие значения параметра a и соответствующие им значения x, мы находим лишь «кандидатов» на экстремумы. Как же выяснить, является ли данное значение a (обозначим его a_0) действительно экстремальным? Для этого можно рассмотреть разность $y(x) - a_0$: если она имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, где $y(x_0) = a_0$, то это

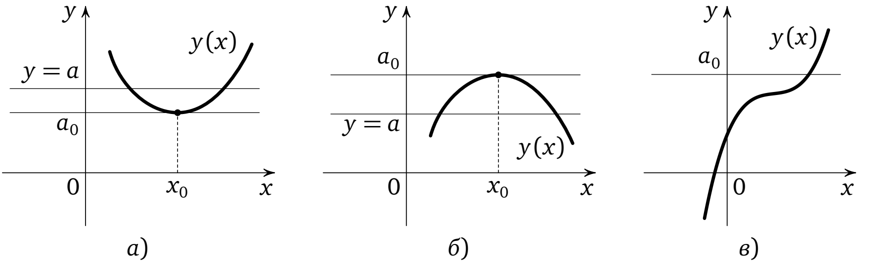


Рис. 5.7

точка экстремума. Причём если $y(x)-a_0>0$, то x_0 — точка минимума (рис. 5.7 *а*), если $y(x)-a_0<0$, то x_0 — точка максимума (рис. 5.7 *б*).

Если же разность $y(x)-a_0$ имеет разные знаки справа и слева от точки x_0, то это точка пересечения графика функции $y(x)$ и прямой $y=a_0$ (рис. 5.7 *в*).

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 5.1 (9 класс). Найдите точки экстремума (определите их характер) и экстремумы функции

$$y=\frac{x^2+x-2}{x-2}. \qquad (*)$$

Решение. Рассмотрим горизонтальную прямую $y=a$ и определим, при каких значениях a график функции $(*)$ имеет с этой прямой две общие точки, одну или не имеет общих точек вовсе. Для этого решим уравнение

$$\frac{x^2+x-2}{x-2}=a \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2+x(1-a)-2+2a=0,\\ x\neq 2, \end{cases} \qquad (1)$$

$$D=(1-a)^2-4(2a-2)=a^2-10a+9=(a-9)(a-1).$$

Построим график зависимости $D=D(a)$ (рис. 5.8).

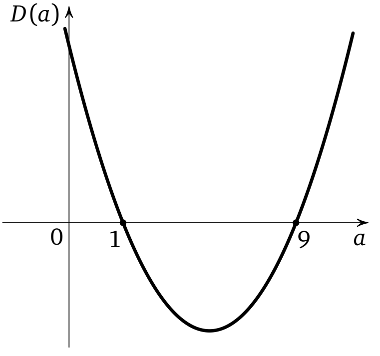


Рис. 5.8

Анализируя построенный график, видим, что $D=0$ при $a=1$ или $a=9$.

В этих точках уравнение (1) имеет единственное решение $x=\frac{a-1}{2}$. При $1<a<9$ уравнение (1) не имеет решений ($D<0$), а при $a<1$ или $a>9$ точек пересечения графика $y(x)$ и прямой $y=a$ будет две, поскольку $D > 0$. Заметим между тем, что те значения a, при которых $D(a) \geqslant 0$, есть *область значений* исходной функции $y(x)$:

$$E(y) = (-\infty; 1] \cup [9; \infty).$$

Таким образом, при $a = 1$ мы имеем случай, изображённый на рис. 5.6, и

$$x_{\max} = \frac{a-1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0, \quad y_{\max} = a_{\max} = 1.$$

Если $a = 9$, то $D(9) = 0$, и при увеличении a уравнение (1) будет иметь два решения. Это случай, изображённый на рис. 5.5, то есть точка минимума.

Пример 5.2 (9 класс). Найдите экстремумы и точки экстремумов функции

$$y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}.$$

Решение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = a \tag{1}$$

и найдём те значения a, при которых оно имеет единственное решение, то есть общая точка у графика функции $y(x)$ и горизонтальной прямой $y=a$ единственная. В таких точках, вероятно, и находятся экстремумы. Впрочем, необходимо ещё исследовать поведение функции вблизи этих точек.

Итак, уравнение (1) на области определения $\mathbb{R}\backslash\{2; 3\}$ равносильно следующему:

$$(a-1)x^2 - 5ax + 6a + 1 = 0.$$

При $a = 1$ получаем $x = 7/5$. В этой точке происходит пересечение графика $y(x)$ и прямой $a = 1$. В ней не соблюдается условие существования двух лежащих рядом точек пересечения графиков $y = y(x)$ и $y = a$, стремящихся к одной.

При $a \neq 1$ имеем

$$D = 25a^2 - 4(a-1)(6a+1) = a^2 + 20a + 4,$$

$$D = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a_1 = -10 + 4\sqrt{6} \approx -0{,}2, \\ a_2 = -10 - 4\sqrt{6} \approx -19{,}8. \end{array}\right.$$

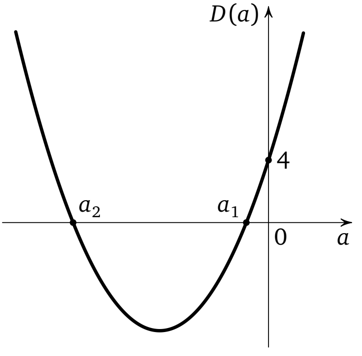


Рис. 5.9

Построим эскиз графика $D = D(a)$ (нужны только нули функции $D(a)$ и направление ветвей); см. рис. 5.9. Получаем

$$a_{\max} = -10 - 4\sqrt{6} \text{ — максимум функции } y(x),$$
$$a_{\min} = -10 + 4\sqrt{6} \text{ — минимум функции } y(x).$$

Эти значения функция $y(x)$ принимает в точках

$$x_{\max} = \frac{5a_{\max}}{2(a_{\max} - 1)} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5} \approx 2{,}38,$$
$$x_{\min} = \frac{5a_{\min}}{2(a_{\min} - 1)} = \frac{7 - 2\sqrt{6}}{5} \approx 0{,}42.$$

Конечно, хотелось бы построить хотя бы эскизы графиков $y = y(x)$ для примеров 5.1 и 5.2, но сделать это можно лишь после знакомства с понятиями предела функции, вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптоты. См. об этом в книге Е. В. Юрченко «Живая методика математики», 2-е изд. (М.: МЦНМО, 2016), с. 116–148.

Экстремумы многочлена третьей степени

В предыдущем параграфе показано, как можно находить экстремумы и точки экстремума для дробно-рациональной функции

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены степени не выше второй, без применения методов математического анализа. В данном параграфе мы покажем, что, пользуясь аналогичным приёмом, можно находить экстремумы многочлена третьей степени. Для успешного понимания тех приёмов, которые будут использованы ниже, приведём формулировки двух теорем.

Теорема 1. *Два многочлена*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и

$$Q_k(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

тождественно равны тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(а) $n = k$, *то есть степени многочленов равны*;

(б) *для любого* i *выполняется равенство* $a_i = b_i$, *то есть коэффициенты при одинаковых степенях* x *равны.*

Теорема 2 (Безу). *Остаток от деления многочлена* $P(x)$ *на двучлен* $x - a$ *есть число* R, *равное значению многочлена в точке* a, *то есть* $R = P(a)$.

Следствие из теоремы Безу. *Если число* α *является корнем многочлена* $P_n(x)$, *то этот многочлен нацело делится на двучлен* $x - \alpha$, *то есть справедливо равенство*

$$P_n(x) = (x - \alpha) \cdot Q_{n-1}(x).$$

Если же числа α_1 *и* α_2 *являются корнями многочлена* $P_n(x)$, *то*

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot F_{n-2}(x).$$

Если в последней формуле положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, то

$$P_n(x) = (x - \alpha_0)^2 \cdot F_{n-2}(x). \qquad (*)$$

Кроме того, вспомним, что в общем случае график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (1)$$

имеет вид, изображённый на рис. 5.10 *а*, *б*.

Рисунок 5.10 *а* соответствует положительному коэффициенту a, рисунок 5.10 *б* — отрицательному коэффициенту a для функции (1).

Для частного случая коэффициентов a, b, c график может выглядеть и так, как показано на рис. 5.10 *в*.

Сейчас мы, не проводя пока общих рассуждений, рассмотрим конкретный пример.

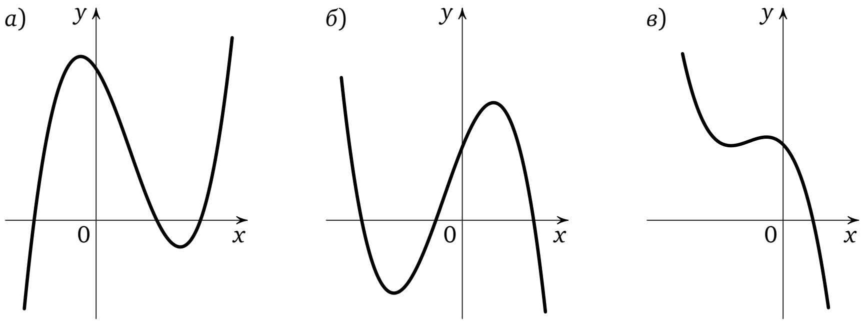


Рис. 5.10

Пример 5.3. Найдите экстремумы и точки экстремумов функции $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

Решение. Если график данной в условии функции имеет вид примерно такой, как на рис. 5.10 *а*, то уравнение $y(x) = a$, в зависимости от значений a, может иметь один корень (рис. 5.11), два (рис. 5.12) или три корня (рис. 5.13).

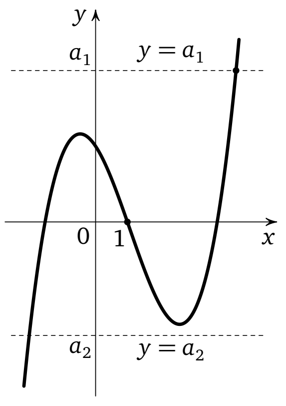


Рис. 5.11

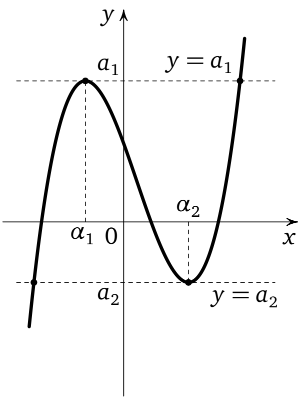


Рис. 5.12

На рис. 5.11 проведены пунктиром две прямые $y = a_1$, $y = a_2$, удовлетворяющие условию: уравнение $y(x) = a$ имеет один корень. На рис. 5.12 показаны две прямые $y = a_1$, $y = a_2$, для которых уравнение $y(x) = a$ имеет ровно два корня.

В этом случае, очевидно, в точках $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ наблюдаются экстремумы. Тогда «сливаются» либо корни α_1, α_2, либо корни α_2, α_3

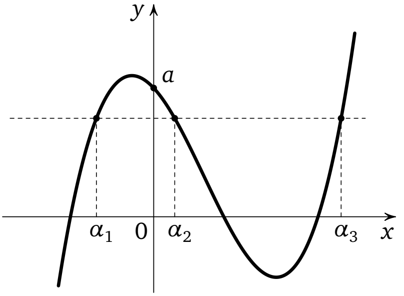


Рис. 5.13

(рис. 5.13), и функцию $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$, согласно формуле $(*)$, можно представить в виде

$$y(x) = (x-\alpha)^2 \cdot (x-\beta) = x^3 - (2\alpha+\beta)x^2 + (2\alpha\beta+\alpha^2)x - \alpha^2\beta, \quad (2)$$

но тогда по теореме 1 должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} -(2\alpha+\beta) = -5, \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 = 3, \\ -\alpha^2\beta = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5-2\alpha, \\ 2\alpha(5-2\alpha)+\alpha^2 = 3, \\ a = 1+\alpha^2\beta, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha = 3, \\ \beta = -1, \\ a = -8; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3}, \\ \beta = \dfrac{13}{3}, \\ a = \dfrac{40}{27}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Заметим, кстати, что кубическое уравнение $y(x) = a$, где $y(x)$ — кубический многочлен, всегда имеет хотя бы один действительный корень. Это же можно сказать о любом многочлене $y(x)$ нечётной степени. Доказательство этих важных фактов лежит вне школьной программы.

Поскольку в рассматриваемом примере у функции

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

коэффициент $a=1>0$, график схематично изображается как на рис. 5.12, следовательно, $\alpha=1/3=\alpha_{\max}$, $\alpha=3=\alpha_{\min}$. Значения функции в этих точках являются максимумом и минимумом самой функции, то есть

$$y_{\max}=y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{40}{27},\quad y_{\min}=y(3)=-8.$$

Построим (для наглядности) график данной функции. Заметим, что $y(1)=0$, то есть

$$x^3-5x+3x+1=(x-1)(x^2-4x-1).$$

Разложив на множители квадратный трёхчлен, получим

$$x^3-5x^2+3x+1=(x-1)(x-(2-\sqrt{5}))(x-(2+\sqrt{5})).$$

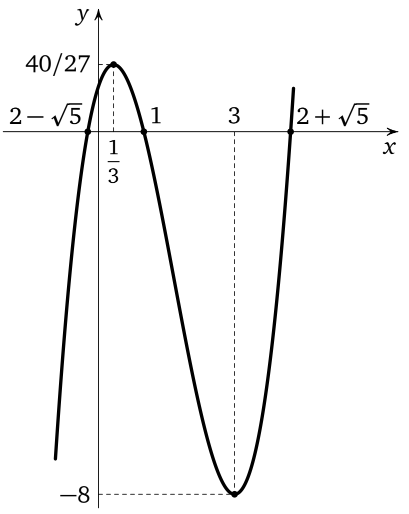


Рис. 5.14

Найдём точку пересечения графика с осью ординат: $y(0)=1$. Эскиз графика изображён на рис. 5.14.

Задачи для самостоятельного решения

1) Найдите точки экстремума для функций:
   а) $y=x^3-3x^2-9x+1$;
   б) $y=-8x^3-21x^2+12x+1$;
   в) $y=x^3+3x^2-9x+3$.

2) Найдите точки экстремума, экстремумы и постройте эскизы графиков:
 а) $y = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 1$;
 б) $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$.

Ответы

1) а) $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$; б) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = \frac{1}{4}$; в) $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 1$.

2) а) $x_{\max} = -\frac{1}{2}$, $x_{\min} = 2$, $y_{\max} = \frac{17}{4}$, $y_{\min} = -27$ (рис. 5.15);
 б) $x_{\min} = \frac{1}{3}$, $x_{\max} = 1$, $y_{\min} = \frac{50}{27}$, $y_{\max} = 2$ (рис. 5.16).

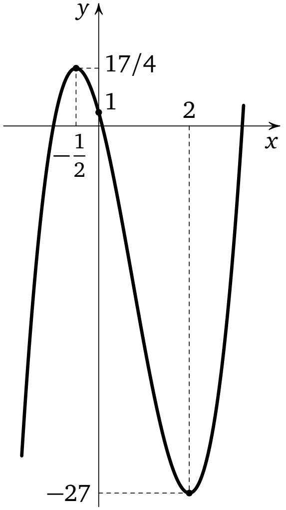


Рис. 5.15

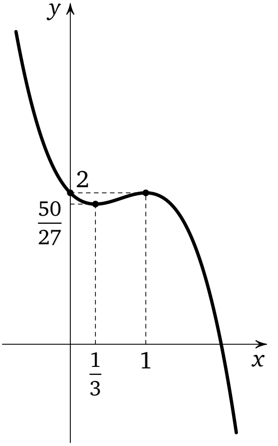


Рис. 5.16

6. Задание фигур на плоскости

В задачах этого раздела главным объектом являются фигуры на координатной плоскости, которые задаются системами неравенств и уравнений. Полезно вначале сформулировать несколько простых утверждений.

Утверждение 6.1. *Если на плоскости дан график функции $y=f(x)$, то все точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant f(x)$ лежат выше этого графика, а те, для которых $y \leqslant f(x)$, — ниже его* (рис. 6.1 *а*, *б*).

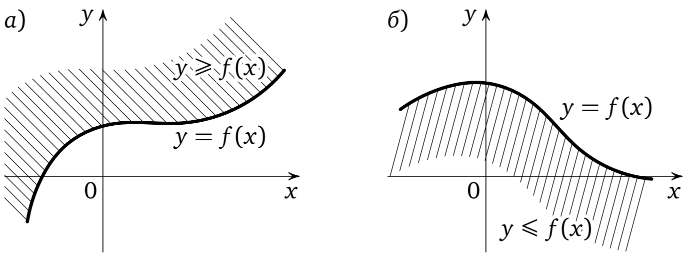


Рис. 6.1

Утверждение 6.2. *Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$, лежат внутри окружности радиуса R с центром $(a;b)$ и на этой окружности* (рис. 6.2 *а*).

Неравенству $(x-a)^2+(y-b)^2 > R^2$ удовлетворяют все точки, лежащие вне этой окружности (рис. 6.2 *б*).

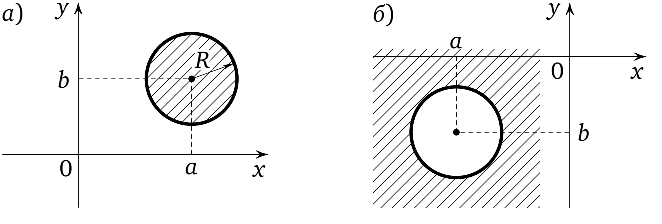


Рис. 6.2

Утверждение 6.3. *Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют некоторой системе неравенств, — это пересечение множеств, удовлетворяющих каждому неравенству в отдельности.*

Пример 6.1. При каких a, b, R система имеет ровно 4 решения:

$$\begin{cases} y \leqslant -2x+12, \\ y \leqslant 2x-2, \\ y \geqslant 0, \\ y \leqslant 4, \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \geqslant R^2? \end{cases}$$

Решение. Первые четыре неравенства задают на плоскости равнобедренную трапецию, вершины которой имеют координаты $A(1;0)$, $B(6;0)$, $C(4;4)$, $D(3;4)$ (рис. 6.3 *а*). Пятое неравенство системы описывает все точки, лежащие вне окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ либо на самой этой окружности.

Легко видеть, что вся система неравенств будет иметь ровно четыре решения только в том случае, если окружность с центром $O(a;b)$

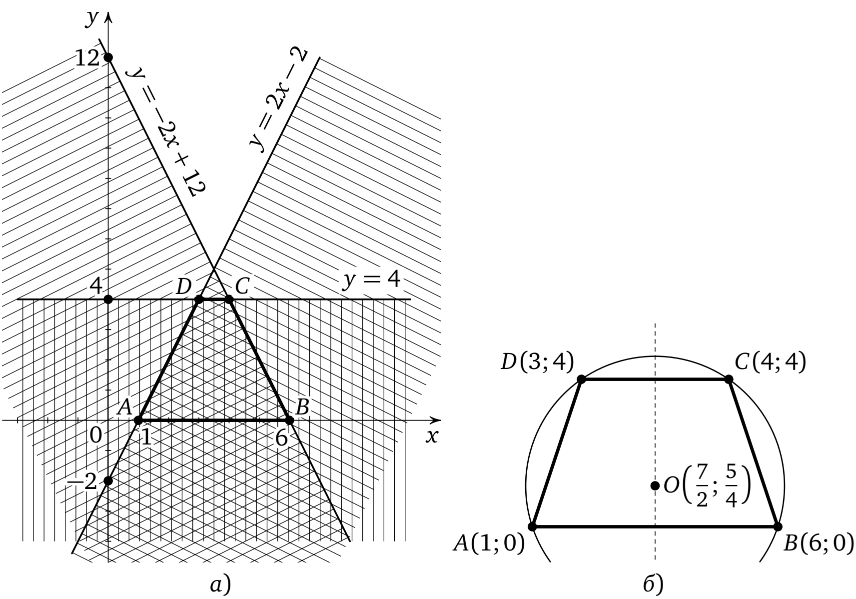


Рис. 6.3

радиуса R будет являться окружностью, описанной вокруг трапеции $ABCD$ (рис. 6.3 *б*). Найдем координаты центра и радиус этой окружности. Центр O лежит на оси симметрии трапеции, то есть $O(7/2; b)$. Расстояние от центра O до вершин A, D трапеции равны радиусу описанной окружности.

Проведём вычисления:

$$OA = OD = R, \quad OA^2 = \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + (b-0)^2,$$

$$OD^2 = \left(\frac{7}{2} - 3\right)^2 + (b-4)^2, \quad OA^2 = OD^2,$$

$$\frac{25}{4} + b^2 = \frac{1}{4} + b^2 - 8b + 16, \quad b = \frac{5}{4}, \quad R^2 = \frac{125}{16}, \quad R = \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{5}{4}$, $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

Пример 6.2. При каких положительных значениях a площадь фигуры, заданной системой условий

$$\begin{cases} y \leqslant 2x, \\ y \geqslant \frac{1}{2}x, \\ y \geqslant a, \\ y \leqslant 2a, \end{cases}$$

не превосходит 1?

Решение. Система неравенств описывает все точки, лежащие внутри трапеции $ABCD$ либо на её границах (рис. 6.4 *а*, *б*). Вершины

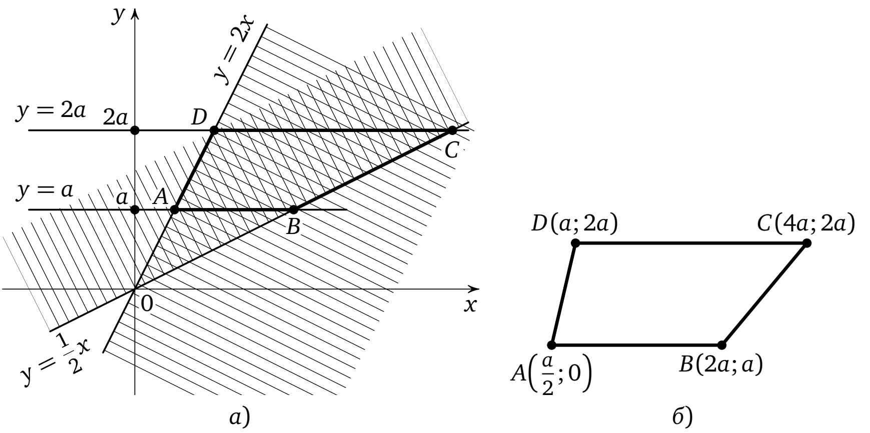


Рис. 6.4

трапеции имеют координаты: $A(a/2;a)$, $B(a;2a)$, $C(4a;2a)$, $D(a;2a)$, а её площадь равна

$$S_{ABCD}=\frac{2a-\frac{a}{2}+(4a-a)}{2}\cdot a=\frac{9}{4}a^2;\quad \frac{9}{4}a^2\leqslant 1,\ a>0\ \Leftrightarrow\ 0<a\leqslant\frac{2}{3}.$$

Ответ: $a\in\left(0;\frac{2}{3}\right]$.

Пример 6.3. При каких значениях a и b любое решение неравенства

$$|x-a|+|y-b|\leqslant 1 \qquad (1)$$

будет также решением системы

$$\begin{cases}|x|\leqslant y,\\ 6-|x|\geqslant y?\end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Система (2) задаёт на плоскости квадрат $OABC$ с центром $(0;3)$ и диагональю, равной 6 (рис. 6.5 *а*).

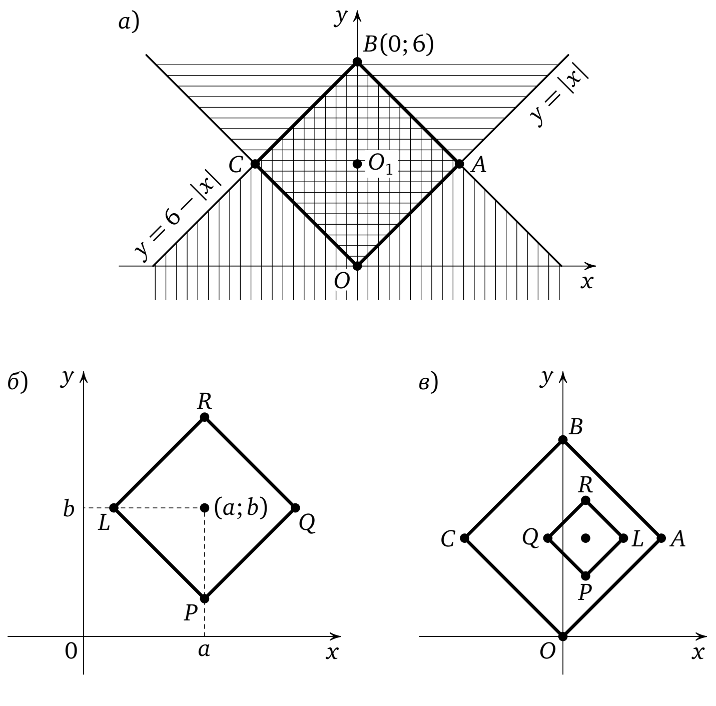


Рис. 6.5

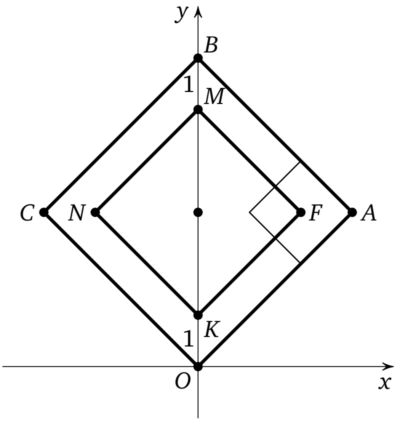


Рис. 6.6

Неравенство (1) также задаёт квадрат $PQRL$ с центром симметрии $(a;b)$, диагональ которого равна 2, а стороны соответственно параллельны сторонам квадрата $OABC$ (рис. 6.5 *б*).

Чтобы квадрат $PQRL$ полностью лежал внутри квадрата $OABC$ (рис. 6.5 *в*), необходимо и достаточно, чтобы центр квадрата $PQRL$ не выходил за границы квадрата $KFMN$, который строится так, как показано на рис. 6.6. Это утверждение очевидно из геометрических соображений.

Квадрат $KFMN$ задаётся системой

$$\begin{cases} y \geqslant |x|+1, \\ y \leqslant 5-|x|. \end{cases}$$

Таким образом, числа a и b должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} b \geqslant |a|+1, \\ b \leqslant 5-|a|. \end{cases}$$

Пример 6.4. При каких значениях a и b все решения неравенства

$$|x-a|+|y-b| \leqslant 1 \qquad (1)$$

являются также решениями системы

$$\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant 3x, \\ y \geqslant 3, \\ y \leqslant 8? \end{cases} \qquad (2)$$

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой (a, b) удовлетворяют условию задачи.

Решение. Множество точек плоскости, удовлетворяющее неравенству $|x|+|y|\leqslant 1$, представляет собой квадрат с центром в точке $(0; 0)$ и вершинами $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$; см. рис. 6.7.

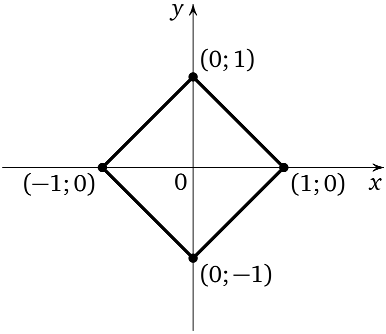


Рис. 6.7

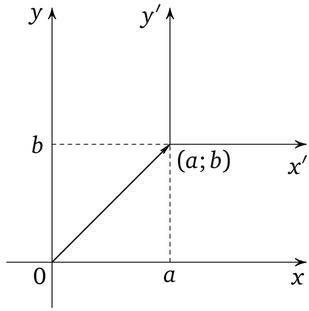


Рис. 6.8

Чтобы найти множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), рассмотрим новую систему координат — такую, что новые координаты точки $(x'; y')$ со старыми связаны равенствами

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}$$

Это означает, что новая система координат получается параллельным переносом старой на вектор $(a; b)$ (рис. 6.8).

В новой системе координат неравенство (1) примет вид

$$|x'| + |y'| \leqslant 1, \tag{3}$$

то есть будет представлять собой описанный выше квадрат.

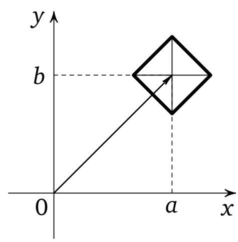
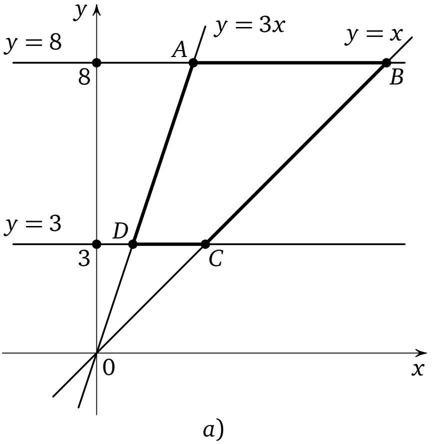


Рис. 6.9

Таким образом, неравенство (3) задаёт на плоскости квадрат с центром в точке $(a; b)$, диагоналями, равными 2, параллельными осям координат (рис. 6.9). Система неравенств (2) задаёт на плоскости трапецию $ABCD$, координаты вершин которой $A(8/3; 8)$, $B(8; 8)$, $C(3; 3)$, $D(1; 3)$ (рис. 6.10 *а*, *б*).



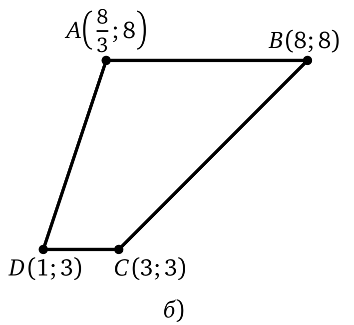


Рис. 6.10

Чтобы квадрат (3) полностью лежал внутри трапеции $ABCD$, необходимо и достаточно, чтобы его центр был смещён более чем на 1 влево от прямой CB, вправо от прямой AD, вверх от прямой CD, вниз от прямой AB.

Построим соответствующую фигуру. Это также будет трапеция. Найдем координаты её вершин L, P, Q, R.

Вершина P лежит на пересечении горизонтальной прямой PQ, задаваемой уравнением $y = 7$, и наклонной прямой LP, имеющей уравнение $y = 3(x - 1)$. Аналогично вершина Q — пересечение прямых PQ ($y = 7$) и RQ ($y = x + 1$). Вершина R — пересечение прямых $y = 4$ и $y = x + 1$, наконец, вершина L — пересечение прямых $y = 4$ и $y = 3(x-1)$. Таким образом, мы получаем следующие координаты вершин: $P(10/3; 7)$, $Q(6; 7)$, $R(3; 4)$, $L(7/3; 4)$. Рисунок 6.11 поясняет сделанные выводы.

На рис. 6.11 кроме трапеций $ABCD$ и $PQRL$ изображены «крайние» положения, которые может занимать квадрат $|x-a|+|y-b|=1$ с диагоналями, равными 2, параллельными осям координат. На рис. 6.11 обозначены отрезки PQ, QR, RL, LP, на которых может располагаться центр квадрата, находящегося внутри трапеции $ABCD$. Заметим, что этот квадрат может иметь общие точки с границами $ABCD$.

Множество точек с искомыми координатами $(a; b)$ — это трапеция $PQRL$. Найдём её площадь. Полусумма оснований

$$\frac{1}{2}(PQ + LR) = \frac{1}{2}\left(\left(6 - \frac{10}{3}\right) + \left(3 - \frac{7}{3}\right)\right) = \frac{5}{3}.$$

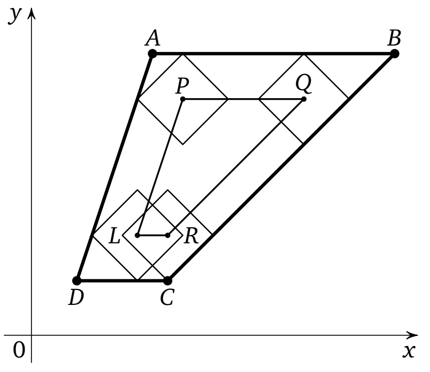


Рис. 6.11

Высота $h = 7 - 4 = 3$. Искомая площадь трапеции

$$S_{PQRL} = \frac{PQ + RL}{2} \cdot h = 5.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–4 найдите площадь фигуры, заданной неравенством (системой неравенств). Сделайте рисунок.

1. $\begin{cases} y \leqslant \sqrt{4 - x^2}, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

2. $(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leqslant 4(1 - \sqrt{xy})$.

3. $x^2 + y^2 + 1 \leqslant 2(|x| + |y|)$.

4. $\begin{cases} |x - y| \leqslant 1, \\ (x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

5. Изобразите на координатной плоскости множество центров квадратов со стороной 1, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 9$. Найдите площадь этого множества.

6. Фигура на плоскости задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant x, \\ y \leqslant 8 - x, \\ y \leqslant 3. \end{cases}$$

Квадрат задан уравнением $|x-a|+|y-b|=1$. Найдите площадь фигуры, координаты $(a;b)$ точек которой таковы, что квадрат полностью лежит внутри заданной фигуры. Сделайте рисунок.

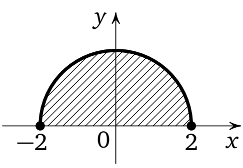
7. Известно, что окружность с центром $(a;b)$ радиуса 1 лежит внутри фигуры, заданной двойным неравенством $0\leqslant y\leqslant\sqrt{9-x^2}$. Найдите площадь множества центров $(a;b)$ таких окружностей. Сделайте рисунок.

8. Окружность радиуса 1, координаты центра которой $(a;b)$, лежит внутри фигуры, задаваемой системой неравенств
$$\begin{cases} x\sqrt{3}-6\leqslant y\leqslant x\sqrt{3}, \\ 0\leqslant y\leqslant 6. \end{cases}$$
Найдите площадь множества точек с координатами $(a;b)$. Сделайте рисунок.

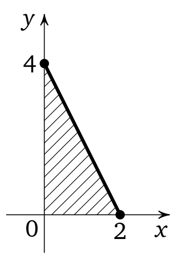
9. Найдите все a, при которых площадь пересечения двух фигур, заданных неравенствами $|x-3|+|y-3|\leqslant 4$ и $|x-a|+|y-a|\leqslant 1$, равна 1. Сделайте рисунок.

Ответы

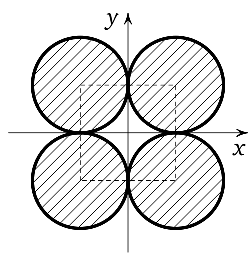
1. $S=\dfrac{1}{2}\pi R^2=2\pi$.
2. $S=4$.
3. $S=4\pi R^2=4\pi$.
4. $S=1$.
5. Из ΔOAB имеем $OA^2=OB^2+AB^2$, $3^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+(3-x)^2$, где $x=BK$, откуда $x=\dfrac{6-\sqrt{35}}{2}$, $S=\pi\cdot(OO_1)^2=\dfrac{36-2\sqrt{35}}{4}$.



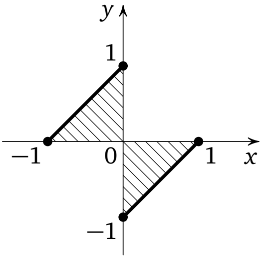
К задаче 1



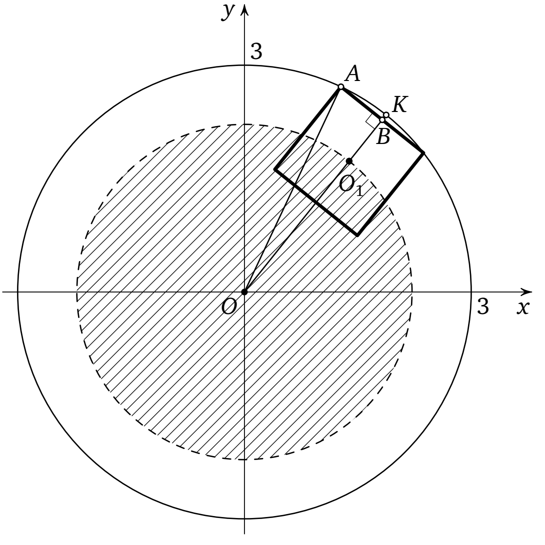
К задаче 2



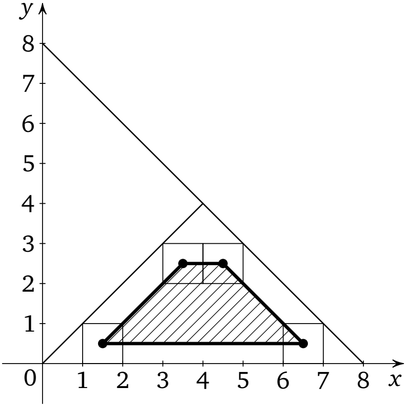
К задаче 3



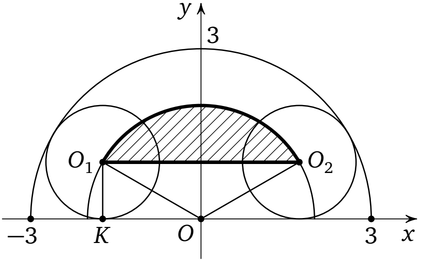
К задаче 4



К задаче 5



К задаче 6



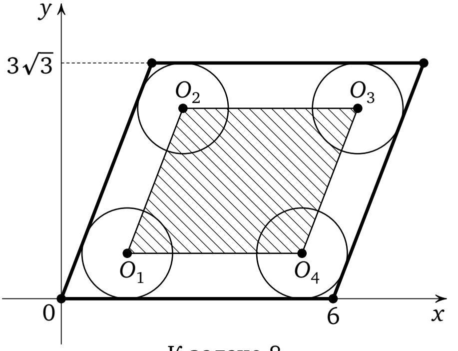
К задаче 7

6. Искомая фигура — заштрихованная трапеция. Её площадь

$$S = \frac{5+1}{2} \cdot 2 = 6.$$

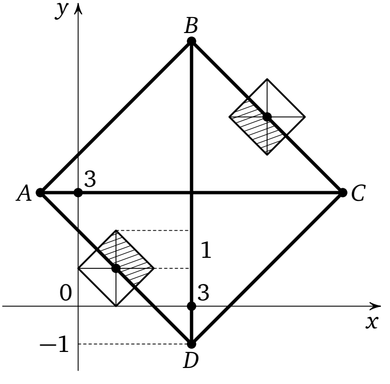
7. *Указание.* $OO_1 = 2$; $O_1K = 1$; $\angle O_1OK = 30^\circ$. Искомая фигура — сегмент окружности с $R = 2$ и $\angle O_1OO_2 = 120^\circ$. Площадь сегмента равна $S = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 - \frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

8. Искомая фигура — ромб $O_1O_2O_3O_4$ с $\angle O_2O_1O_4 = 60^\circ$ и стороной $O_1O_2 = \dfrac{6\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}}$, $S = \dfrac{62\sqrt{3}-72}{3}$.



К задаче 8

9. Первое неравенство описывает внутреннюю часть квадрата $ABCD$ с центром в точке $(3; 3)$ и диагоналями, равными 8 и параллельными осям координат. Второе неравенство задаёт квадрат с центром в точке $(a; a)$ и диагоналями, равными 2 и также параллельными осям координат. Искомая фигура — пересечение квадратов — прямоугольники, площадь которых равна половине площади малого квадрата. Откуда следует, что центр малого квадрата лежит либо на стороне AD, либо на стороне BC. Координаты центра равны полусумме соответственных координат концов отрезков AC и BD. Откуда $a = 1$ или $a = 3$.



К задаче 9

7. Некоторые свойства функций. Симметрия

Существует ряд достаточно простых свойств функций, использование которых помогает быстро, а иной раз, можно сказать, изящно решать некоторые задачи. Это становится особенно наглядным, когда диапазон рассматриваемых функций значительно расширяется — появляются тригонометрические, показательные, логарифмические, сложные функции, но это происходит на третьей ступени обучения, то есть в 10–11 классах. Однако познакомиться и научиться использовать эти свойства на том материале, который изучается в 8–9 классе, полезно не только для будущего, но и само по себе. Использоваться в дальнейших примерах будут следующие функции: рациональные, дробно-рациональные, функции, содержащие знаки радикалов n-й степени, знаки модуля и, конечно, сложные функции, содержащие комбинации вышеперечисленных.

Напомним некоторые определения и свойства.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на множестве чисел X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции: для таких значений $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Если верно строгое неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то функцию называют *строго монотонно возрастающей*. Если же большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция называется *монотонно убывающей*.

Обозначим через $D(f)$ область определения функции f.

Определение 2. Если $(-x) \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$, то функция называется *чётной*; если $f(-x) = -f(x)$, то *нечётной*.

Замечание 1. График чётной функции симметричен относительно оси ординат (оси OY), а график нечётной функции — центрально-симметричен относительно начала координат.

Замечание 2. Мы будем пользоваться интуитивным представлением о непрерывности функции, в качестве такового можно использовать утверждение: график функции, непрерывной на интервале или луче, можно нарисовать на указанном множестве, не отрывая карандаша от бумаги.

Перечислим теперь (без доказательства) те свойства, которыми мы будем активно пользоваться.

Свойство 1. *Если $f(x)$ строго монотонно возрастает, а $g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня.*

Замечание 3. В принципе уравнение $f(x)=g(x)$ может вовсе не иметь корней (рис. 7.1), но если оно имеет корень и этот корень найден каким-либо способом (даже просто подбором), то искать другие корни уже не следует.

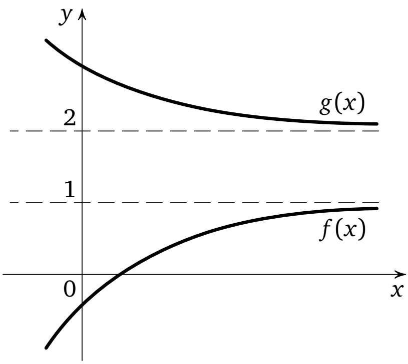


Рис. 7.1

Свойство 2. *Если в уравнении $f(x)=0$ функция $f(x)$ чётная или нечётная и в условии говорится, что уравнение имеет (или должно иметь) нечётное количество корней, то среди этих корней обязательно есть число 0.*

Свойство 3. *Если $f(x)$ строго монотонна, то справедливо утверждение $f(\alpha)=f(\beta) \Leftrightarrow \alpha=\beta$.*

Свойство 4. *Если функция $f(x)$ строго монотонно возрастает, то уравнение $f(f(x))=x$ и уравнение $f(x)=x$ равносильны. Аналогично уравнение $f(f(f\ldots(f(x))))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$.*

Свойство 5. *Если наибольшее значение на своей области определения функция $f(x)$ достигает в точке x_0 и оно равно c, а функция $g(x)$*

достигает своего наименьшего значения в той же точке x_0, *причём оно также равно* c, *то* x_0 *является единственным решением уравнения* $f(x) = g(x)$.

В данном параграфе будут рассматриваться не только уравнения, содержащие параметр, но и уравнения, имеющие нестандартное решение, не содержащие параметр.

Отметим, что задачи, при решении которых используется свойство 5, иногда называют задачами минимакса. При их решении часто используют такие неравенства, как

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \geqslant 2; \quad \left|a+\frac{\mu^2}{a}\right| \geqslant 2|\mu| \ \text{ при } \ \mu \neq 0.$$

Пример 7.1. Решите уравнение $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=5-x$.

Решение. Заметим, что функция $f(x) = \sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}$ строго монотонно возрастает (как сумма двух возрастающих функций). Заметим также, что функция $g(x) = 5 - x$ строго монотонно убывает. Следовательно, можно воспользоваться свойством 1. Попробуем отыскать корень исходного уравнения, построив эскизы графика функции $f(x)$ и график (прямую) функции $g(x)$. Заметим, что $D(f) = [1; \infty)$, $E(f) = [\sqrt{3}; \infty)$.

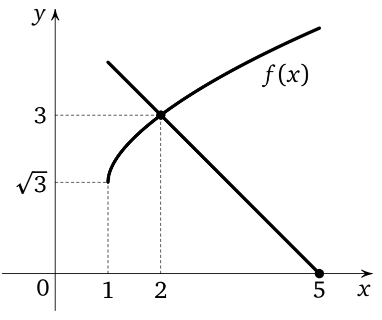


Рис. 7.2

Графики (эскизы) показывают, что абсцисса точки пересечения $f(x)$ и $g(x)$ (решение исходного уравнения) находится вблизи точки $x = 2$ (рис. 7.2). Проверяем:

$$f(2) = \sqrt{2+2}+\sqrt{2-1} = 2+1 = 3, \quad g(2) = 5-2 = 3,$$

откуда получаем $f(2) = g(2)$.

Ответ: 2.

Пример 7.2. При каких значениях a уравнение

$$x^4 + ax^2 + 3a|x| + a^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

Решение. Заметим, что если число x_0 является решением уравнения (1), то и число $-x_0$ также является его решением. Следовательно, для существования единственного решения уравнения (1) *необходимо* (но не достаточно!), чтобы $x_0 = -x_0$, т. е. $x_0 = 0$. Подставив $x = 0$ в исходное уравнение, получим

$$a^2 - 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1. \end{array}\right.$$

Рассмотрим случай $a = 1$, тогда уравнение (1) примет вид

$$x^4 + x^2 + 3|x| = 0.$$

Число $x = 0$ является его решением, а для любого другого значения x слева стоит сумма трёх положительных чисел, то есть иных решений нет.

В случае $a = -1$ имеем $x^4 - x^2 - 3|x| = 0$, учитывая, что $x^4 = |x|^4$; $x^2 = |x|^2$, имеем

$$|x|(|x|^3 - |x| - 3) = 0.$$

Это уравнение имеет более одного корня (один корень $x = 0$), в чём легко убедиться, рассмотрев уравнение $|x|^3 - |x| - 3 = 0$ и построив эскизы графиков функций $f(x) = |x|^3$, $g(x) = |x| + 3$ (рис. 7.3).

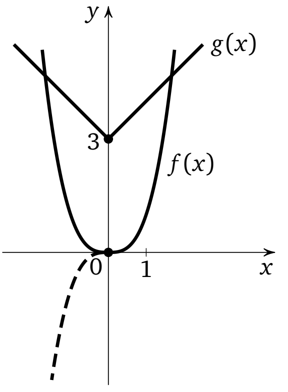


Рис. 7.3

Ответ: $a = 1$.

Пример 7.3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, & (1) \\ y = x^2 + a & (2) \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы, то и пара $(-x_0; y_0)$ — также решение. Отсюда следует, что количество решений может быть нечётным только в случае, если одно из них $(0; y_0)$. Подставим $x_0 = 0$ в систему:

$$\begin{cases} |0| + |y_0| = 1 \\ y_0 = 0^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y_0 = 1, \\ y_0 = -1, \end{array}\right. \\ y_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_0 = 1, \\ a = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y_0 = -1, \\ a = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, 1 и -1 — возможные значения a.

В случае $a = 1$ из второго уравнения следует, что $y \geqslant 1$, и тогда уравнение (1) имеет единственное решение $x = 0$, $y = 1$, которое удовлетворяет и уравнению (2), то есть $(0; 1)$ — единственное решение заданной системы.

В случае $a = -1$ из уравнения (2) имеем $y = x^2 - 1$, тогда уравнение (1) примет вид $|x| + |x^2 - 1| = 1$. Легко показать, что система при $a = -1$ имеет три решения: $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; -1)$.

Этот результат можно достаточно просто проиллюстрировать на графиках. Первое уравнение задаёт квадрат с вершинами в точках $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. График второго уравнения — парабола $y = x^2 + 1$ в случае $a = 1$ или $y = x^2 - 1$ в случае $a = -1$ (рис. 7.4).

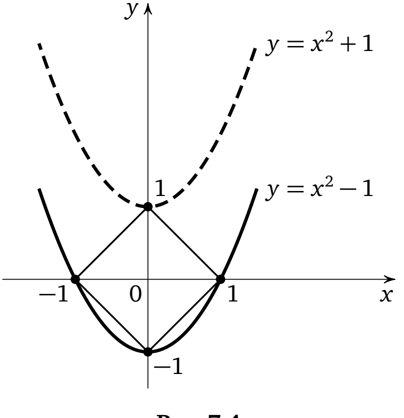


Рис. 7.4

Пример 7.4. Решите уравнение

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right) + 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = 0.$$

Решение. Ясно, что попытки «лобовой атаки», то есть избавления от радикалов с помощью возведения в квадрат после необходимых преобразований, ни к чему хорошему не приведут.

Но если мы рассмотрим функцию $f(t) = t\cdot\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$, то наше уравнение можно будет записать в виде

$$f(2x+1)+f(3x)=0.$$

Исследуем теперь функцию $f(t)$.

1. $D(f)=(-\infty;\infty)$.

2. $f(t)$ монотонно возрастает на $D(f)$.

Действительно, рассмотрим разные случаи.

а) Пусть $t_2 > t_1 > 0$, тогда

$$t_2\cdot\left(2+\sqrt{t_2^2+3}\right) > t_1\cdot\left(2+\sqrt{t_1^2+3}\right), \tag{$*$}$$

так как слева стоит произведение двух бóльших положительных чисел.

б) Если $t_2 > 0$, $t_1 < 0$, то слева стоит положительное число, а справа — отрицательное и неравенство ($*$) верно.

в) Если $0 > t_2 > t_1$, то $0 < -t_2 < -t_1$ и доказываемое неравенство после умножения на -1 примет вид

$$(-t_2)\left(2+\sqrt{t_2^2+3}\right) < (-t_1)\left(2+\sqrt{t_1^2+3}\right),$$

учитывая, что $(-t_2)^2 = t_2^2$, $(-t_1)^2 = t_1^2$, мы получим уже рассмотренный случай а).

3. Заметим также, что

$$f(-t) = -t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right) = -f(t),$$

то есть $f(t)$ — нечётная функция.

Итак, учитывая перечисленные свойства, а также то, что $f(t)$ непрерывна, получим, что

$$f(2x+1)+f(3x)=0 \iff f(2x+1) = -f(3x) = f(-3x) \iff$$
$$\iff 2x+1=-3x \iff x=-\frac{1}{5}.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

Пример 7.5. Решите уравнение $4x^3+1 = 5\sqrt[3]{\dfrac{5x-1}{4}}$.

Решение. Возведём обе части уравнения в третью степень:

$$(4x^3+1)^3 = 5^3\cdot\frac{5x-1}{4} \iff x = \frac{4\cdot\left(\frac{4x^3+1}{5}\right)^3+1}{5}. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{4t^3+1}{5}.$$

Эта функция строго монотонно возрастает и непрерывна. Уравнение (1) можно будет записать в виде $f(f(x)) = x$. По свойству 4 это уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$, то есть уравнению

$$\frac{4x^3+1}{5} = x \iff 4x^3 - 4x - x + 1 = 0 \iff$$

$$\iff (x-1)(4x(x+1)-1) = 0 \iff \left[\begin{aligned} &x = 1,\\ &x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2},\\ &x = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $1;\ \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$.

Пример 7.6. При каких значениях a и R система

$$\begin{cases} y = |x-1| + |x+1|, & (1)\\ x^2 + (y-a)^2 = R^2 & (2)\end{cases}$$

имеет ровно три решения?

Решение. График функции (1) и окружность (2) имеют общую ось симметрии — ось Oy. Следовательно, все решения данной системы будут иметь симметричные им относительно оси Oy. Таким образом, решений либо чётное число, либо одно из них лежит на оси Oy. Удовлетворять будет лишь окружность, изображённая на рис. 7.5.

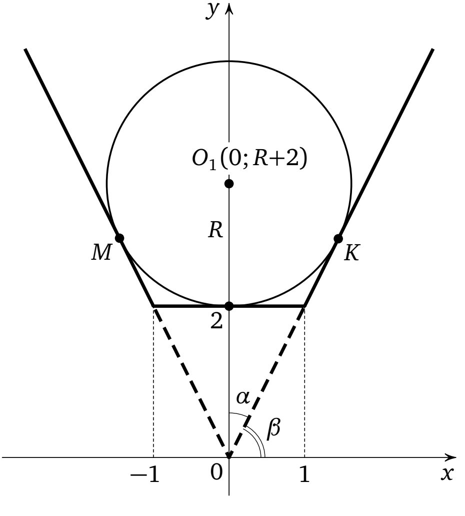


Рис. 7.5

Центр искомой окружности имеет координаты $O_1(0; R+2)$. Тогда из треугольника OO_1K имеем

$$\sin\alpha = \frac{OK}{OO_1} = \frac{R}{R+2}.$$

Но прямая OK задаётся уравнением $y = 2x$, значит,

$$\operatorname{tg}\beta = 2, \quad \sin\alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta} = 4 \iff \cos^2\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{R}{R+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad R = \frac{2}{\sqrt{5}-1}, \quad a = R+2 = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}.$$

Ответ: $R = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$, $a = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

Пример 7.7. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} by^2 + 4by - 2x + 7b + 4 \leqslant 0, \\ bx^2 - 2y - 2bx + 4b - 2 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Проведём некоторые тождественные преобразования:

$$\begin{cases} by^2 + 4by + 4b - 2x + 3b + 4 \leqslant 0, \\ bx^2 - 2bx + b - 2y + 3b - 2 \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b(y^2 + 4y + 4) - 2x + 3b + 4 \leqslant 0, \\ b(x^2 - 2x + 1) - 2y + 3b - 2 \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b(y+2)^2 - 2x + 3b + 4 \leqslant 0, \\ b(x-1)^2 - 2y + 3b - 2 \leqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим теперь $y+2=u$, $x-1=v$, $y=u-2$, $x=v+1$. Система $(*)$ примет вид

$$\begin{cases} bu^2 - 2(v+1) + 3b + 4 \leqslant 0, \\ bv^2 - 2(u-2) + 3b - 2 \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} bu^2 - 2v + 3b + 2 \leqslant 0, \\ bv^2 - 2u + 3b + 2 \leqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Обратим внимание, что если пара чисел $(u_0; v_0)$ является решением системы (1), то и пара $(v_0; u_0)$ — также её решение. Но по условию данная система (а значит, и система (1)!) должна иметь единственное решение. Для этого *необходимо* (но не достаточно!), чтобы выполнялось равенство $u_0 = v_0$, откуда после подстановки в любое неравенство системы (1) получим

$$bu^2 - 2u + 3b + 2 \leqslant 0.$$

Это неравенство имеет единственное решение, если $b > 0$ и дискриминант левой части равен 0, то есть

$$\begin{cases} b > 0, \\ 4 - 4b(3b+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{3}.$$

Эти условия являются также достаточными, что легко проверить, подставив в систему (1) значение $b = 1/3$:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}u^2 - 2v + 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}v^2 - 2u + 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 6v + 9 \leqslant 0, \\ v^2 - 6u + 9 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-3)^2 + 6u - 6v \leqslant 0, \\ (v-3)^2 + 6v - 6u \leqslant 0. \end{cases}$$

Сложив полученные неравенства, будем иметь

$$(u-3)^2 + (v-3)^2 \leqslant 0.$$

Это неравенство имеет единственное решение $u = v = 3$.

Легко проверить непосредственной подстановкой, что это решение будет также решением системы (1).

Поскольку $u(y) = y + 2$, $v(x) = x - 1$, т. е. осуществлена линейная подстановка, проверку полученного значения $b = 1/3$ можно и нужно проводить в системе (1).

Ответ: $b = \frac{1}{3}$.

Замечание. Рассмотренный пример, в отличие от предыдущих, требует не только умения видеть и использовать симметрию, но и провести предварительные преобразования. Причём проведённые преобразования нельзя назвать «очевидными». Такого рода «вычурные» условия даются для того, чтобы максимально усложнить получение высшего балла на вступительных испытаниях или при сдаче ЕГЭ.

Пример 7.8. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16} = -2x^2 + 8x - 5. \qquad (*)$$

Решение. Область определения данного уравнения — все действительные числа. Рассмотрим внимательно функции, стоящие под знаками радикалов. Это квадратичные функции, достигающие своего наименьшего значения в точке $x_в = -b/(2a)$ (абсцисса вершины графика соответствующей параболы):

$$y = x^2 - 4x + 5, \quad x_в = -\frac{-4}{2} = 2, \quad y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1.$$

Для второй функции

$$y = 3x^2 - 12x + 16, \quad x_в = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2, \quad y_в = y(2) = 4.$$

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения достигается при $x = 2$ и оно равно 3. Рассматривая функцию, стоящую в правой части, видим, что она достигает своего наибольшего значения в вершине параболы, ветви которой направлены вниз, при этом

$$x_в = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2, \quad y_в = y(2) = 3.$$

Отсюда следует, что данное уравнение имеет единственное решение $x = 2$.

Ответ: 2.

Замечание. Эту задачу можно решить и по-иному. Обозначим

$$z = x^2 - 4x + 5,$$

тогда

$$3x^2 - 12x + 16 = 3z + 1, \quad -2x^2 + 8x - 5 = -2z + 5.$$

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{z} + \sqrt{3z + 1} = -2z + 5.$$

Левая часть полученного уравнения монотонно возрастает, а правая — убывает. Единственное решение находим подбором: $z_0=1$, тогда $x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Резюме

Многие задачи повышенной сложности имеют несколько решений. Убедительных аргументов в пользу какого-нибудь одного, как правило, нет. Это, мы полагаем, дело вкуса.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения.

1. $x+1+\sqrt{2(x+1)^2+5}-2x-2-\sqrt{8x^2+16x+13}=0.$
2. $(2x+1)\left(1+\sqrt{4x^2+4x+8}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$
3. $x^3+4=5\sqrt[3]{5x-4}.$
4. $1+\sqrt[3]{x+9}=-x+2.$
5. $\sqrt{x+2}=-2x+6.$
6. $\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{2x^2+8x+24}=-x^2-4x+1.$
7. $x^2-4x+6+\sqrt[3]{2x^2-8x+9}=3-\sqrt{4x-8}.$

Ответы и краткие указания

1. $f(t)=t+\sqrt{2t^2+5}$, $f(x+1)-f(2x+2)=0$, $x=-1$.
2. $f(2x+1)=f(-x)$, $x=-\frac{1}{3}$.
3. $x=\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5x-4}-4}$, $x=\sqrt[3]{5x-4}$, $x^3-5x+4=0$, $x=1$; $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.
4. $f(x)=1+\sqrt[3]{x+9}$ возрастает, $g(x)=-x+2$ убывает. Корень $x=-1$.
5. $x=2$.
6. $x=-2$. **Решение.** Наименьшее как первого, так и второго подкоренного выражения достигается в точке $x=-2$. Эти значения соответственно равны 1 и 16, значит, наименьшее значение всей левой части уравнения $1+4=5$. Наибольшее значение правой части уравнения достигается также при $x=-2$ и равно 5.
7. $x=2$. **Решение.** Область определения уравнения задается неравенством $x\geqslant 2$. На этой области левая часть уравнения — строго возрастающая функция, а правая часть уравнения — строго убывающая функция. Следовательно, уравнение имеет не более одного решения. Легко проверить, что это решение $x=2$.

Список литературы

1. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре 8–9. М.: Просвещение, 2001.
2. *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф.* Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1986.
3. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. М.; Харьков: Илекса; Гимназия, 2003.
4. *Козко А. И., Чирский В. Г.* Задачи с параметрами. М.: МЦНМО, 2007.
5. *Мочалов В. В., Сильвестров В. В.* Уравнения и неравенства с параметрами. Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 2004.
6. *Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В.* Конкурсные задачи по математике. М.: Наука, 1992.
7. *Рязановский А. Р., Мирошин В. В.* Математика. Решение задач повышенной сложности. М.: Интеллект-Центр, 2007.
8. *Ткачук В. А.* Математика — абитуриенту. М.: МЦНМО, 1998.
9. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 11 класса. М.: Просвещение, 1991.
10. *Шахмейстер А. Х.* Уравнения и неравенства с параметрами. СПб.; М., 2006.
11. *Шестаков С. А., Юрченко Е. В.* Уравнения с параметром. М.: Изд-во «Слог», 1993.
12. *Ястребинецкий Г. А.* Задачи с параметрами. М.: Просвещение, 1986.

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru